ÁLGEBRA

Ingeniería Industrial.

Ingeniería Electromecánica.

Ingeniería Electrónica.

Ingeniería en Gestión Empresarial.

Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Ingeniería Mecatrónica.

Ingeniería Bioquímica.

Ingeniería en Materiales.

Ingeniería en Informática.

Ingeniería en Logística.

Ingeniería Aeronáutica.

Ingeniería Química.

Licenciatura en Biología.

Cuadernillo de Teoría y Problemas

ELABORÓ: M.C.E. JAVIER BAÑUELOS ORTEGA.

Índice

PROGRAMA DE INDUCCIÓN 2009

TEMARIO DE ÁLGEBRA

Capítulo I. Nociones Básicas

1.1 Definiciones

Expresión algebraica. Es una combinación de números y de letras que representan números cualesquiera.

Por ejemplo, $3x^2 - 5xy + 2y^4$, $2a^3b^5$, $\frac{5xy+3z}{2a^3 - c^2}$ son expresiones algebraicas.

Término. Es una expresión que sólo contiene productos y cocientes de números y de letras. Así, pues, $6x^2y^3$, $5x/3y^4$, $-3x^7$, son términos de una expresión algebraica.

Sin embargo, $6x^2 + 7xy$ es una expresión algebraica que consta de dos términos.

Monomio. Es una expresión algebraica de un solo término.

Así, pues, $7x^3y^4$, $3xyz^2$, $4x^4/y$ son monomios.

A causa de esta definición, los monomios de denominan con frecuencia términos simplemente.

Binomio. Es una expresión algebraica de dos términos.

Por ejemplo, $2x + 4y$, $3x^4 - 4xyz^3$ son binomios.

Trinomio. Es una expresión algebraica de tres términos.

Por ejemplo, $3x^2 - 5x + 2$, $2x + 6y - 3z$, $x^3 - 3xy/z - 2x^3z^7$ son trinomios.

Multinomio. Es una expresión algebraica de más de un término.

Por ejemplo, $7x + 6y$, $3x^3 + 6x^2y - 7xy + 6$, $7x + 5x^2/y - 3x^3/16$ son multinomios.

Coeficiente. Cualquier factor de un término se llama coeficiente del resto de dicho término. Así, pues, en el término $5x^3y^2$, $5x^3$ es el coeficiente de y^2, $5y^2$ es el coeficiente de x^3 y 5 es el coeficiente de x^3y^2.

Coeficiente numérico. Si un término es el producto de un número por una o varias letras, dicho número es el coeficiente numérico (o simplemente coeficiente) del término.

Por ejemplo, en el término $-5x^3y^2$, el coeficiente numérico o coeficiente es -5

Términos semejantes. Son aquellos que sólo se diferencian en su coeficiente numérico.
Por ejemplo, $7xy$ y $-2xy$ son términos semejantes; $3x^2y^4$ y $-\frac{1}{2}x^2y^4$ son asimismo términos semejantes; sin embargo, $-2a^2b^3$ y $-3a^2b^7$ no son semejantes.
Se pueden reducir dos o más términos semejantes a uno solo. Por ejemplo $7x^2y-4x^2y+2x^2y$ se puede reducir a $5x^2y$

Un término es entero y racional, con respecto a ciertas letras (que representan a números cualesquiera), si está formado por:

a) Potencias enteras y positivas de letras multiplicadas por un factor numérico.
b) Un número.

Por ejemplo, los términos $6x^2y^3, -5y^4, -4x, \sqrt{3}x^3y^6$, son enteros y racionales con respecto a las letras que figuran en ellos. Sin embargo, $3\sqrt{x}$ no es racional con respecto a x y $\frac{4}{x}$ no es entero con respecto a x.

Polinomio. Es un monomio, o un multinomio, en el que cada término es entero y racional con respecto a las letras.

Por ejemplo, $3x^2y^3-5x^4y+2,\ \ 2x^4-7x^3+3x^2-5x+2,\ \ 4xy+z,\ \ 3x^2$, son polinomios. Sin embargo, $3x^2-\frac{4}{x}, 4\sqrt{y}+3,$ no son polinomios.

Grado de un monomio. Es la suma de todos los exponentes de la parte literal del término.
Por ejemplo, el grado de $4x^3y^2z$ es 3+2+1=6. El grado de una constante, como por ejemplo, 6,0,$-\sqrt{3}$, π, es cero.

Grado de un polinomio. Es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de cero.
Los grados de los términos del polinomio $7x^3y^2-4xz^5+2x^3y$ son 5, 6 y 4, respectivamente; por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

Símbolos de agrupamiento. Son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] o las llaves { }; se emplean para indicar que los términos encerrados en ellos se consideran como una sola cantidad.
Por ejemplo, la suma de las dos expresiones algébricas, $5x^2-3x+y$ y $2x-3y$, se puede representar por $(5x^2-3x+y)+(2x-3y)$, su diferencia por $(5x^2-3x+y)-(2x-3y)$, y su producto por $(5x^2-3x+y)(2x-3y)$.
Algunas veces se emplea como símbolo de agrupamiento una barra encima de los términos a asociar. Por ejemplo, $\overline{5x-3y}$ es lo mismo que escribir $5x-3y$.

Supresión de los símbolo de agrupamiento. Está regida por las normas siguientes:

a) Si un signo + precede al símbolo de agrupamiento dicho símbolo se puede se puede suprimir sin modificar los términos que contiene.
   Por ejemplo, $(3x+7y)+(4xy-3x^3)=3x+7y+4xy-3x^3$.
b) Si un signo – precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.
   Por ejemplo, $(3x+7y)-(4xy-3x^3)=3x+7y-4xy+3x^3$.
c) Si en una expresión figura mas de un símbolo de agrupamiento, para suprimirlos se comienza por los interiores.
   Por ejemplo:
   $2x-\{4x^3-(3x^2-5y)\}=2x-\{4x^3-3x^2+5y\}=2x-4x^3+3x^2-5y.$

1.2 Operaciones Básicas entre Expresiones

1.2.1 Suma de expresiones algebraicas.

Se efectúa agrupando los términos semejantes. Para llevar a cabo la suma se puede disponer las expresiones en filas, con los términos semejantes en la misma columna, y, a continuación, se suman los términos de cada columna.

Ejemplo. Sumar $7x+3y^3-4xy,\ 3x-2y^3+7xy,$ y $2xy-5x-6y^3$

Disponemos el cálculo así:

$$\begin{array}{r} 7x+3y^3-4xy \\ 3x-2y^3+7xy \\ -5x-6y^3+2xy \\ \hline 5x-5y^3+.5xy \end{array}$$

Resultado: $5x-5y^3+.5xy$

1.2.2 Resta de dos expresiones algebraicas.

Se lleva a cabo efectuando la suma de la expresión minuendo con la opuesta del sustraendo, la cual se obtiene cambiando el signo de todos sus términos.

Ejemplo. Restar $2x^2-3xy+5y^2$ de $10x^2-2xy-3y^2$

$$\begin{array}{r} 10x^2-2xy-3y^2 \\ 2x^2-3xy+5y^2 \\ \hline 8x^2+xy-8y^2 \end{array}$$

Resta: $8x^2+xy-8y^2$

También se puede hacer así:

$$\begin{aligned}&(10x^2-2xy-3y^2)-(2x^2-3xy+5y^2)\\&=10x^2-2xy-3y^2-2x^2+3xy-5y^2\\&=8x^2+xy-8y^2\end{aligned}$$

1.2.3 Multiplicación de expresiones algebraicas.

a) Multiplicación de dos o más monomios. Se efectúa aplicando las reglas de la potenciación y de los signos y las propiedades asociativa y conmutativa del producto.

Ejemplo. Multiplicar $-3x^2y^3z,\ 2x^4y$ y $-4xy^4z^2$.

Escribimos $(-3x^2y^3z)(2x^4y)(-4xy^4z^2)$.

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa, tendremos,

$\{(-3)(2)(-4)\}\{(x^2)(x^4)(x)\}\{(y^3)(y)(y^4)\}\{z)(z^2)\}$

De acuerdo con las reglas de los signos y exponentes se deduce

$24x^7y^8z^3$

b) Multiplicación de un monomio por un polinomio. Se efectúa multiplicando el monomio por todos y cada uno de los términos del polinomio, sumando los productos obtenidos.

Ejemplo. Multiplicar $3xy-4x^3+2xy^2$ por $5x^2y^4$.

Escribimos $(5x^2y^4)(3xy-4x^3+2xy^2)$

$=(5x^2y^4)(3xy)+(5x^2y^4)(-4x^3)+(5x^2y^4)(2xy^2)$

$15x^5y^5-20x^5y^4+10x^3y^6$

c) Multiplicación de dos polinomios. Se efectúa multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, sumando los productos obtenidos.

Es conveniente ordenar los polinomios según las potencias crecientes (o decrecientes) de una de las letras.

Ejemplo. Multiplicar $-3x+9+x^2$ por $3-x$.

Ordenando según las potencias decrecientes de x,

	$x^2-3x+9x\quad(2)$
	$\underline{-x+3}$
Multiplicando (2) por –x,	$-x^3+3x^2-9x$
Multiplicando (2) por 3,	$\underline{3x^2-9x+27}$
Sumando	$-3x^2+6x^2-18x+27$

1.2.4 División de expresiones algebraicas.

a) ***División de dos monomios.*** Se efectúa hallando el cociente de los coeficientes y el de los factores literales, multiplicando después dichos cocientes.

Ejemplo. Dividir $24x^4y^2z^3$ por $-3x^3y^4z$.

Ponemos $\dfrac{24x^4y^2z^3}{-3x^3y^4z} = \left(\dfrac{24}{-3}\right)\left(\dfrac{x^4}{x^3}\right)\left(\dfrac{y^2}{y^4}\right)\left(\dfrac{z^3}{z}\right) = [-8][x]\left(\dfrac{1}{y^2}\right)[z^2] = -\left(\dfrac{8xz^2}{y^2}\right)$

b) ***División de dos polinomios.***

i) Se ordenan los términos de ambos polinomios según las potencias decrecientes (o crecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.
ii) Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer término del cociente.
iii) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se resta del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo.
iv) Con el dividendo de iii), se repiten las operaciones ii) y iii) hasta que se obtenga un resto igual a cero o de grado menor que el del dividendo.
v) El resultado es: $\dfrac{dividendo}{divisor} = cociente + \dfrac{resto}{divisor}$

Ejemplo. Dividir $x^2+2x^4-3x^5+x-2$ por x^2-3x+2.
Se ordenan los polinomios según las potencias decrecientes de x y se dispone el cálculo de la forma siguiente:

$$\begin{array}{lll}
2x^4-3x^3+x^2+x+2 & & \underline{\;x^2-3x+2\;} \\
\underline{2x^4-6x^3+4x^2} & & 2x^2+3x+6 \\
\quad 3x^3-3x^2+x-2 & & \\
\quad \underline{3x^3-9x^2+6x} & & \\
 & 6x^2-5x-2 & \\
 & \underline{6x^2-18x+12} & \\
 & \quad 13x-14 &
\end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{2x^4-3x^3+x^2+x-2}{x^2-3x+2} = 2x^2+3x+6+\dfrac{13x-14}{x^2-3x+2}$

Ejercicios extra clase

Ahora te toca a ti practicar, realiza estos sencillos ejercicios a fin de que repases lo visto en este capítulo; cualquier duda, consulta con tu profesor.

1. ¿De qué grado son los siguientes polinomios?

a) $9xzy + 3x^2 - 5y^5 + 8x^3y^4z^2 + 3z^{10}$ b) $8 - 3x^2 + 6x^7 - 2x$

2. Asigna a cada expresión la palabra "correcto" o "incorrecto" según consideres:

a) $9y^5z^7 - 4x^5y^6 - 8z^7 = (9)(y^5)(z^7) - (4x^5)(y^6) - 8(z^{7)}$

b) $(11x^5 + 6y^8)(4xy) = 11x^5 + 6y^8 + 4xy$

c) $(14x^3 + 12y^7) - (5y^2 - 7x^3 + z^8) = 14x^3 + 12y^7 - 5y^2 - 7x^3 + z^8$

d) $9x^3 - 10z^4 + 5y^8 - 6x^3 + 6z^4 = 3x^3 - 4z^4 + 5y^8$

3. Realiza las siguientes operaciones algebraicas

a) $(7x^2 + 3y^6 + 8z^3) + (14y^6 - 3z^3 - 5x^2$

b) $(3x^2y - 8y^3 + 7x^5) - (2x^5 + 3y^3 - 6x^2y)$

c) $(2x^2 - 3)(3y - 1)(xy + 3z)$

d) $\dfrac{(3x^2 - 7x)(x - 3)}{x^2 + 5x - 1}$

Capítulo 2. Productos de Interés Práctico

2.1 Productos de interés práctico.

Las fórmulas que se exponen a continuación son el resultado de algunos de los productos que con mayor frecuencia se presentan en el cálculo algebraico y con los que el alumno debe procurar familiarizarse en todo lo posible. La comprobación de dichos resultados se puede realizar efectuando las multiplicaciones correspondientes.

1. $a(c+d)=ac+ad$
2. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
3. $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4. $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
5. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
6. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
7. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

Otros productos muy utilizados son:

8. $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
9. $(a-b)(a-b)(a-b)=(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
10. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
11. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
12. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Se puede comprobar, efectuando las multiplicaciones, que

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \qquad (10)$$
$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$$
$$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$$
$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)=a^6-b^6$$

Generalizando, tendremos

13. $(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=a^{n}-b^{n}$

Siendo n un *entero positivo cualquiera* (1, 2, 3, 4,…).

Análogamente, se puede comprobar que

$$(a+b)\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)=a^{3}+b^{3} \qquad (11)$$
$$(a+b)\left(a^{4}-a^{3}b+a^{2}b^{2}-ab^{3}+b^{4}\right)=a^{5}+b^{5}$$

Ejercicios extra clase

A continuación se te presentan los siguientes ejercicios para que practiques lo que hasta ahora has visto. Recuerda consultar cualquier duda que te surja con tu profesor.

I. Relaciona las columnas siguientes:

a) $3x\ (7x+3) =$

b) $(8x+2y)(8x+2y) = (8x+2y)^2 = 64x^2 + 4y^2$

c) $(4x^4 + 8z^3)(4x^4 - 8z^3) = (4x^4)^2 – (8z^3)^2$

( ) Incorrecto

( ) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

( ) $(3x)(7x) + (3x)(3)$

II. Desarrolla las siguientes expresiones

a) $8x^9 + 27y^{12} =$

b) $64w^{30} – 4096x^{42} =$

Capítulo 3. Descomposición en factores

3.1 Factores de una expresión algebraica

Los factores de una expresión algebraica dada son dos o más expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí originan la primera.

Por ejemplo, la expresión algebraica $x^2 - 7x + 6$ se puede expresar como producto de los dos factores $(x-1)(x-6)$.

Análogamente, $x^2 + 2xy - 8y^2 = (x+4y)(x-2y)$

3.2 Proceso de descomposición en factores.

Se aplica, generalmente, a polinomios de coeficientes enteros. En este caso, se requiere que los factores sean también polinomios de coeficientes enteros. Mientras no se advierta lo contrario, supondremos estas condiciones.

Por ejemplo, $(x-1)$ no lo consideraremos descompuesto en los factores $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$, ya que éstos no son polinomios. Igualmente, $(x^2 - 3y^2)$ no lo consideramos descompuesto en los factores $(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$, ya que éstos no son polinomios de coeficientes enteros. Asimismo, aunque $3x+2$ se pueda expresar por $3\left(x+\frac{2}{3}y\right)$, no lo consideraremos así, porque $x+\frac{2}{3}y$ no es un polinomio de coeficientes enteros.

Un polinomio de coeficientes enteros es ***primo*** cuando no se puede descomponer en factores siguiendo los criterios expuestos anteriormente. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ está expresado como producto de los factores primos $x-1$ y $x-6$.

Un polinomio se puede descomponer totalmente en factores cuando se pueda expresar como producto de factores primos.

Nota 1: En la descomposición en factores se pueden efectuar cambios de signo. Por ejemplo $x^2 - 7x + 6$ se puede descomponer en $(x-1)(x-6)$, o bien en $(1-x)(6-x)$. Se demuestra que la descomposición en factores primos, prescindiendo de los cambios de signo o del orden de los factores, es única. Este es el teorema fundamental de la descomposición en factores.

Nota 2: Un polinomio es primo cuando no admite más factores (o divisores) que él mismo, con signo más o menos, y la unidad, ± 1. Esta definición es análoga a la de números primos, como son 2, 3, 5, 7, 11.

Nota 3: Algunas veces se descomponen en factores polinomios de coeficientes racionales; por ejemplo, $x^2 - \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$. En estos casos, los factores son también polinomios de coeficientes racionales.

En la *descomposición en factores* son de gran aplicación las fórmulas I-XIV del Capítulo 3. De la misma forma que leídas de izquierda a derecha dan el resultado de un *producto,* cuando se leen de derecha a izquierda constituyen la descomposición en *factores.*

3.2.1 Apuntes de utilidad a la hora de descomponer en factores

Los procedimientos siguientes son de gran utilidad en la descomposición en factores:

a) *Factor monomio común.* Tipo: $ac + ad = a(c+d)$

Ejemplos. 1) $6x^2y - 2x^3 = 2x^2(3y - x)$

2) $2x^3y - xy^2 + 3x^2y = xy(2x^2 - y + 3x)$

b) *Diferencia de los cuadrados.* Tipo: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Ejemplos. 1) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$ donde $a = x, b = 5$

2) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x+3y)(2x-3y)$
Donde $a = 2x, b = 3y$

c) *Trinomio cuadrado perfecto.* Tipos:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Un trinomio es un cuadrado perfecto si dos términos son cuadrados perfectos y el tercero es igual al duplo de la raíz cuadrada del producto de aquellos.

Ejemplos. 1) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

2) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$

d) *Otros trinomios.* Tipos:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$
$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

Ejemplos. 1) $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$ siendo $a=-4, b=-1$ su suma es igual a $(a+b)=-5$ y su producto $ab=4$

2) $x^2+xy-12y^2=(x-3y)(x+4y)$ siendo $a=-3y, b=4y$

3) $3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$. En este caso $ac=3, bd=-2, ad+bc=-5$

4) $6x^2+x-12=(3x-4)(2x+3)$

5) $8-14x+5x^2=(4-5x)(2-x)$

e) *Suma, diferencia de dos cubos.* Tipos:
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Ejemplos. 1)
$$\begin{aligned} 8x^3+27y^3 &= (2x)^3+(2y)^3 \\ &= (2x+3y)\left[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2\right] \\ &= (2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2) \end{aligned}$$

2) $8x^3y^3-1=(2xy)^3-1^3=(2xy-1)(4x^2y^2+2xy+1)$

f) *Agrupamiento de términos.* Tipo:
$$ac+bc+ad+bd=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$$

Ejemplo. 1)
$$\begin{aligned} 2ax-4bx+ay-2by &= 2x(a-2b)+y(a-2b) \\ &= (a-2b)(2x+y) \end{aligned}$$

g) *Factores de* $a^n \pm b^n$. Aplicamos la fórmula 13 y 14 del capítulo 3.

Ejemplos. 1)
$$\begin{aligned} 32x^5+1=(2x)^5+1^5 &= (2x+1)\left[(2x)^4-(2x)^3+(2x)^2-2x+1\right] \\ &= (2x+1)(16x^4-8x^3+4x^2-2x+1) \end{aligned}$$

2) $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

h) *Suma y resta de términos.*

Ejemplos. Factor x^4+4.

Sumando y restando $4x^2$ (doble del producto de las raíces cuadradas de x^4 y 4), obtenemos

$$\begin{aligned} x^4+4 &= \left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2 \\ &= \left(x^2+2+2x\right)\left(x^2+2-2x\right)=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right) \end{aligned}$$

i) *Combinación de los métodos anteriores.*

Ejemplo.

$$\begin{aligned} x^4-xy^3-x^3y+y^4 &= \left(x^4-xy^3\right)-\left(x^3y-y^4\right) \\ &= x\left(x^3-y^3\right)-y\left(x^3-y^3\right) \\ &= \left(x^3-y^3\right)(x-y)=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)(x-y) \\ &= (x-y)^2\left(x^2+xy+y^2\right) \end{aligned}$$

3.3 Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor, abreviado M.C.D., de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado y mayor coeficiente numérico (prescindiendo de los signos) que es factor (o divisor) de los polinomios dados.

Para hallar el M.C.D. de varios polinomios se puede de la forma siguiente:

a) Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos.

b) El M.C.D. es el producto obtenido al tomar todos los factores comunes elevados a la menor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo. El M.C.D. de
$2^3 3^2 (x-y)^3 (x+2y)^2$, $2^2 3^3 (x-y)^2 (x+2y)^3$, $3^2 (x-y)^2 (x+2y)$
es $3^2 (x-y)^2 (x+2y)$.

Dos o más polinomios son primos entre sí si su M.C.D. es la unidad ± 1.

3.4 Mínimo Común Múltiplo (M.C.M)

El mínimo común múltiplo, abreviado por las siglas M.C.M., de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado y menor coeficiente (prescindiendo de los signos) del cual es factor (o divisor) cada uno de los polinomios dados.

Para hallar el M.C.M. de varios polinomios se procede de la forma siguiente:

a) Se descompone cada polinomio en el producto de sus factores primos.

b) El M.C.M. es el producto obtenido al tomar todos los factores, comunes y no comunes, elevados a la mayor potencia con la que entran a formar parte en cada uno de los polinomios.

Ejemplo. El M.C.M. de
$2^3 3^2(x-y)^3(x+2y)^2$, $2^2 3^3(x-y)^2(x+2y)^3$, $3^2(x-y)^2(x+2y)$
es $2^3 3^3(x-y)^3(x+2y)^3$.

PROBLEMAS RESUELTOS

FACTOR BINOMIO COMUN.

1. *a)* $2x^2 - 3xy = x(2x - 3y)$

b) $4x + 8y + 12z = 4(x + 2y + 3z)$

e) $10a^2b^3c^4 - 15a^3b^2c^4 + 30a^4b^3c^2 = 5a^2b^2c^2\,(2bc^2 - 3ac^2 + 6a^2b)$

f) $4a^{n+1} - 8a^{2n} = 4a^{n+1}\,(1 - 2a^{n-1})$

c) $3x^2 + 6x^3 + 12x^4 = 3x^2\,(1 + 2x + 4x^2)$

d) $9s^3t + 15s^2t^3 - 3s^2t^2 = 3s^2t(3s + 5t^2 - t)$

Ejercicios extra clase

Aquí tienes algunos ejercicios para que refuerces lo estudiado en este capítulo; no dejes que ninguna duda quede sin aclarar, acércate siempre a tu profesor, él estará dispuesto a ayudarte.

I. Busca en la segunda columna la respuesta correcta a los ejercicios que se plantean:

La factorización de las siguientes expresiones es:

a) $x^2 - b^2 =$	( ) $(x + b)(x + b)$
b) $x^2 + b^2 =$	( ) $-3(m^2 – 27c – 12)$
c) $-3m^2 + 27c + 12 =$	( ) $(3m^2 + 4)^2$
d) $-3m^2 + 27c – 12 =$	( ) $(b – x)(x + b)$
	( ) $3(-m^2 – 27c + 12)$
	( ) $(3m^4 + 4)^2$
	( ) $(x – b)(x + b)$

Capítulo 4. Fracciones Algebraicas

4.1 Fracción algebraica racional

Una fracción algebraica racional es una expresión que se puede escribir como cociente de dos polinomios P/Q. El polinomio P es el numerador y Q el denominador de la fracción.

Por ejemplo, $\frac{3x-4}{x^2-6x+8}$ y $\frac{x^3+2y^2}{x^4-3xy+2y^3}$ son fracciones algebraicas racionales.

4. 2 Reglas para el cálculo con fracciones algebraicas.

Son las mismas que las correspondientes de las fracciones en aritmética. Una de las fundamentales es: *El valor de una fracción no se altera si se multiplican, o dividen, el numerador y denominador por una misma cantidad, siempre que ésta sea distinta de cero*. En estas condiciones las fracciones se llaman *equivalentes.*

Por ejemplo, si se multiplica el numerador y el denominador de $\frac{x+2}{x-3}$ por $(x-1)$,

se obtiene la fracción equivalente $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ siempre que

(x - 1) sea distinto de cero, es decir, $x \neq 1$.

Análogamente, la fracción $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ se puede expresar por $\frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$

y dividir, entonces, su numerador y denominador por (x + 1), siempre que (x + 1) sea distinto de cero, o bien, $x \neq 1$, obteniéndose $\frac{x+2}{x+3}$. La operación de dividir por un factor común al numerador y denominador recibe el nombre de *simplificación* y se indica tachando el término común; por ejemplo,

SIMPLIFICAR una $\frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{(x+3)\cancel{(x+1)}} = \frac{(x+2)}{(x+3)}$. fracción es transformarla en otra equivalente cuyo numerador y denominador no tengan más factores comunes que la unidad, ± 1. La fracción que resulta es irreducible. Esta reducción se lleva acabo descomponiendo en factores el numerador y denominador, simplificando, seguidamente, los factores comunes siempre que sean distintos de cero.

Por ejemplo, $$\frac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x-3y)\cancel{(x-y)}}{(x+y)\cancel{(x-y)}}=\frac{x-3y}{x+y}$$

siempre que $(x-y)\neq 0$

4.3 Signos en las fracciones racionales

Tres signos están asociados a una fracción: el correspondiente al numerador, el del denominador y el de la fracción. Se pueden alterar dos cualesquiera de ellos, simultáneamente, sin que varíe el valor de la fracción. Si a una fracción no se le antepone signo alguno, se sobrentiende que éste es positivo (más).

Ejemplos. $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$, $-(\frac{-a}{-b})=-\frac{a}{b}$.

Muchas veces la simplificación consiste en un cambio de signo. Por ejemplo,

$$\frac{x^2-3x+2}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-2)}=\frac{x-1}{-1}=1-x$$

4.4 Operaciones Básicas con Fracciones

4.4.1 Suma algebraica de fracciones con igual denominador.

La suma algebraica de fracciones que tiene el mismo denominador es la otra fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplo.

$$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3-4-2+1}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{x-3}-\frac{3x+4}{x-3}+\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2-(3x+4)+(x^2+5)}{x-3}=\frac{2-3x-4+x^2+5}{x-3}=\frac{x^2-3x+3}{x-3}$$

4.4.2 Suma algebraica de fracciones con distinto denominador.

Para sumar y restar fracciones de distinto denominador, se transforman éstas en otras equivalentes que tengan un denominador común.
El denominador común mínimo (D.C.M.) de varias fracciones es el mínimo común múltiplo (M.C.M.) de sus denominadores.

Por ejemplo, el D.C.M. de $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$ es el M.C.M. de 4, 5, 10 que es 20, y el D.C.M. de $\frac{2}{x^2}, \frac{3}{2x}, \frac{x}{7}$ es $14x^2$.

Ejemplos.

$$\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}-\frac{16}{20}+\frac{14}{20}=\frac{15-16+14}{20}=\frac{13}{20}$$

$$\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}-\frac{x}{7}=\frac{2(14)-3(7x)-(x)(2x^2)}{14x^2}=\frac{28-21x-2x^3)}{14x^2}$$

$$\frac{2x+1}{x(x+2)}-\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)-3x}{x(x+2)(x-1)}=\frac{2x^2-4x-1}{x(x+2)(x-1)}$$

4.4.2 El producto de fracciones.

El *producto* de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{16}=\frac{2\cdot 4\cdot 15}{3\cdot 5\cdot 16}=\frac{120}{240}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{x+3}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)}\cdot\frac{(x-5)}{(x+3)}=\frac{(x+3)(x-3)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+3)}=\frac{x-3}{x-1}$$

4.4.3 El cociente de fracciones

El cociente de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando la fracción dividendo (o fracción numerador) por el recíproco de la fracción divisor (o fracción denominador).

Ejemplo 1:

$$\frac{3}{8}\div\frac{5}{4} \quad \text{o} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{10}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{7}{x^2-4} \div \frac{xy}{x+2} = \frac{7}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{xy} = \frac{7}{xy(x-2)}$$

4.4.4 Fracción compuesta

Un *fracción compuesta* es aquella que tiene 1 o más fracciones en el numerador o en el denominador. Para simplificarla:

1) Se reducen el numerador y el denominador a fracciones simples.
2) Se dividen las dos fracciones que resultan.

Ejemplo. $$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = x-1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Reducción de fracciones

1. a) $\dfrac{15x^2}{12xy} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{3 \cdot 4 \cdot x \cdot y} = \dfrac{5x}{4y}$

b) $\dfrac{4x^2y}{18xy^3} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 9 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \dfrac{2x}{9y^2}$

c) $\dfrac{14a^3b^3c^2}{-7a^2b^4c^2} = -\dfrac{2a}{b}$

d) $\dfrac{8x - 8y}{16x - 16y} = \dfrac{8\cancel{(x - y)}}{16\cancel{(x - y)}} = \dfrac{1}{2}$ (siendo $x - y \neq 0$)

e) $\dfrac{x^3y - y^3x}{x^2y - xy^2} = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{xy(x - y)} = \dfrac{\cancel{xy}\cancel{(x - y)}(x + y)}{\cancel{xy}\cancel{(x - y)}} = x + y$

f) $\dfrac{x^2 - 4xy + 3y^2}{y^2 - x^2} = \dfrac{(x - 3y)(x - y)}{(y - x)(y + x)} = -\dfrac{(x - 3y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}(y + x)} = -\dfrac{x - 3y}{y + x} = \dfrac{3y - x}{y + x}$

g) $\dfrac{6x^2 - 3xy}{-4x^2y + 2xy^2} = \dfrac{3x(2x - y)}{2xy(y - 2x)} = -\dfrac{3x\cancel{(2x - y)}}{2xy\cancel{(2x - y)}} = -\dfrac{3}{2y}$

h) $\dfrac{r^3s + 3r^2s + 9rs}{r^3 - 27} = \dfrac{rs(r^2 + 3r + 9)}{r^3 - 3^3} = \dfrac{rs(r^2 + 3r + 9)}{(r - 3)(r^2 + 3r + 9)} = \dfrac{rs}{r - 3}$

i) $\dfrac{(8xy + 4y^2)^2}{8x^3y + y^4} = \dfrac{(4y[2x + y])^2}{y(8x^3 + y^3)} = \dfrac{16y^2\,(2x + y)^2}{y(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)} = \dfrac{16y(2x + y)}{4x^2 - 2xy + y^2}$

Ejercicios extra clase

Realiza ahora estos ejercicios para que refuerces lo que has estudiado en esta ocasión; apóyate en tu maestro para que aclares cualquier duda que te surja en la realización de tu trabajo.

I. Elige la opción que consideres adecuada:

1. La fracción que resulta de multiplicar el denominador y numerador por (x^2 + 2x – 1) a $\frac{x^3+2}{x-1}$ es:

a) $\frac{x^5+2x^4+2x^2+4x-2}{x^3+x^2-3x+1}$

b) $\frac{x^5+2x^4+x^3+2x^2+4x-2}{x^3+x^2+3x+1}$

c) $\frac{x^5+2x^4-x^3+2x^2+4x-2}{x^3+x^2-3x+1}$

II. Relaciona ambas columnas:

a) Si factorizo completamente la expresión: $\frac{2x^2-2}{5x^2-14x-3}$ me queda:

( ) $\frac{2(x-1)(x+1)}{(5x+1)(x-3)}$

( ) $\frac{5(x^5-x^3)(2x^2-3)}{x^8-57}$

b) Una expresión equivalente a:

$\frac{(5x^3-30x^5)(2x^2-3)}{57-x^8}$ es:

( ) $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)+(3x^2-2)(x+2)^2-(4x+1)(x-3)}{(x+2)^2(x-3)}$

( ) $\frac{5x(x-1)(3x^2-1)(5x+2)}{(x^3+2)(6x-3)}$

c) Si sumo $\frac{x-1}{x+2}+\frac{3x^2-2}{x-3}$ lo que tendré es:

$\frac{(2x-1)(x+1)}{(5x+1)(x-3)}$

d) $\frac{5x(3x^2-1)(5x+2)}{6x-3}\div\frac{x^3+2}{x-1}=$

$\frac{-5(x^5-x^3)(2x^2-3)}{x^8-57}$

Capítulo 5. Potencias y Raíces

5.1 Potencias de exponente positivo.

Si n es un entero positivo, a^n representa el producto de n factores iguales a *a.* Así, pues, $a^4 = a*a*a*a$. En la expresión a^n, *a* recibe el nombre de base y n el de exponente o índice de la potencia. a^n se lee "potencia enésima de *a"*, o bien "*a* a la n". Si n = 2, a^2 se lee "*a* al cuadrado" a^3 se lee "*a* al cubo".

Ejemplos.

$$x^3 = x \cdot x \cdot x,$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

5.2 Potencia de exponente entero negativo

Si n es un entero positivo, por definición

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$ suponiendo a ≠0

Ejemplos.

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27$$

$$-4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{(a+b)}$$

5.3 Radicación

Si n es un entero positivo y ***a*** y ***b*** son tales que $a^n = b$, por definición, a es la raíz enésima de b.
Si ***b*** es positivo, solamente hay un número positivo tal que $a^n = b$. Dicho número se representa por $\sqrt[n]{b}$ y recibe el nombre de la raíz enésima principal de ***b***.

Ejemplo 1. $\sqrt[4]{16}$ es un número positivo que, elevado a la cuarta potencia, da lugar al número 16. Es evidente que dicho número es +2 y, por tanto, $\sqrt[4]{16}$ = +2.

Ejemplo 2. El número -2 elevado a la cuarta potencia también da lugar a 16. En estas condiciones, -2 es una raíz cuarta de 16, pues no es la raíz cuarta principal de 16.

Si ***b*** es negativo, no existe una raíz enésima positiva de ***b***, pero si existe una raíz enésima negativa de ***b*** siempre que n sea impar. Este número negativo recibe el nombre de raíz enésima principal de ***b*** y se representa por $\sqrt[n]{b}$.

Ejemplo 3. $\sqrt[3]{-27}$ es un número que, elevado al cubo (o tercera potencia), da lugar a -27. Se ve fácilmente que dicho número es -3 y, por tanto, $\sqrt[3]{-27} = -3$ es la raíz cúbica principal de -27.

Ejemplo 4. Siempre que n sea par, por ejemplo, $\sqrt[4]{-16}$, la raíz enésima principal no se puede representar por medio de un número real.

Nota. En matemáticas superiores se demuestra que hay exactamente n valores tales que $a^n = b, b \neq 0$, siempre que se introduzcan los números imaginarios (o complejos).

5.4 Potencia de exponente fraccionario positivo.

Si m y n son enteros positivos, por definición

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$ (suprimiendo $a \geq 0$ si n es par)

Ejemplos.

$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$(27)^{2/3} = \sqrt[3]{(27)^2} = 9$$

5.5 Potencia de exponente fraccionario negativo.

Si m y n son enteros positivos, por definición

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

Ejemplos.

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

$$x^{-5/2} = \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

5.6 Potencia de exponente cero.

Por definición, $a^0 = 1$ si $a \neq 0$.

Ejemplos.

$10^0 = 1$ $\quad$ $(-3)^0 = 1$

$(ax)^0 = 1$ $\quad$ (si ax ≠ 0)

5.7 Propiedades Generales de la potenciación.

Si p y q son números reales, se verifica

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Ejemplos.

$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$ $\quad$ $5^{-3} \cdot 5^7 = 5^{-3+7} = 5^4$

$3^{1/3} \cdot 3^{1/6} = 3^{1/3+1/6} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ $\quad$ $3^9 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} = 3^4 = 81$

$2^{1/2} \cdot 2^{5/2} = 2^3 = 8$

b) $(a^p)^q = a^{pq}$

Ejemplos.

$(2^4)^3 = 2^{12}, \qquad (5^{1/3})^{-3} = 5^{(1/3)(-3)} = 5^{-1} = 1/5, \qquad (3^2)^0 = 3^0 = 1$

$(x^5)^{-4} = x^{-20}, \qquad (a^{2/3})^{3/4} = a^{(2/3)(3/4)} = a^{1/2}$

c) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a \neq 0$

Ejemplos.

$\dfrac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4, \qquad \dfrac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}, \qquad \dfrac{x^{1/2}}{x^{-1}} = x^{1/2-(-1)} = x^{3/2}$

$\dfrac{(x+15)^{4/3}}{(x+15)^{5/6}} = (x+15)^{4/3-5/6} = (x+15)^{1/2} = \sqrt{x+15}$

d) $(ab)^p = a^p b^p$

Ejemplos.

$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4, \qquad (2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3, \qquad (3a)^{-2} = 3^{-2}a^{-2} = \dfrac{1}{9a^2}$

$(4x)^{1/2} = 4^{1/2}x^{1/2} = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$

e) $(\dfrac{a}{b})^p = \dfrac{a^p}{b^p} \qquad b \neq 0$

Ejemplos.

$(\dfrac{2}{3})^5 = \dfrac{2^5}{3^5} = \dfrac{32}{243}, \qquad (\dfrac{x^2}{y^3})^{-3} = \dfrac{(x^2)^{-3}}{(y^3)^{-3}} = \dfrac{x^{-6}}{y^{-9}} = \dfrac{y^9}{x^6}$

$(\dfrac{5^3}{2^6})^{-1/3} = \dfrac{(5^3)^{-1/3}}{(2^6)^{-1/3}} = \dfrac{5^{-1}}{2^{-2}} = \dfrac{2^2}{5^1} = \dfrac{4}{5}$

PROBLEMAS RESUELTOS

EXPONENTE ENTERO POSITIVO

1. *a*) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

c) $(\frac{2}{3})^5 = (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{32}{243}$

d) $(3y)^2\ (2y)^3 = (3y)(3y)(2y)(2y)(2y) = 72y^5$

e) $(-3xy^2)^3 = (-3xy^2)(-3xy^2)(-3xy^2)$
$= -27x^3y^6$

EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

2. *a*) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

c) $-4(4)^{-2} = -4(\frac{1}{4^2}) = -\frac{1}{4}$

d) $-2b^{-2} = -2(\frac{1}{b^2}) = -\frac{2}{b^2}$

e) $(-2b)^{-2} = \frac{1}{(-2b)^2} = \frac{1}{4b^2}$

f) $5 \cdot 10^{-3} = 5(\frac{1}{10^3}) = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$

g) $\frac{8}{10^{-2}} = 8 \cdot 10^2 = 800$

$h)\quad \dfrac{4}{x^{-2}y^{-2}} = 4x^2y^2$

$i)\quad (\dfrac{3}{4})^{-3} = \dfrac{1}{(3/4)^3} = (\dfrac{4}{3})^3 = \dfrac{64}{27}$

$j)\quad (\dfrac{x}{y})^{-3} = \dfrac{1}{(x/y)^3} = (\dfrac{y}{x})^3 = \dfrac{y^3}{x^3}$

$k)\quad (0{,}02)^{-1} = (\dfrac{2}{100})^{-1} = \dfrac{100}{2} = 50$

$l)\quad \dfrac{ab^{-4}}{a^{-2}b} = \dfrac{a\cdot a^2}{b\cdot b^4} \quad \dfrac{a^3}{b^5}$

$m)\quad \dfrac{x^{2n+1}}{y^{3n-1}} = x^{2n+1}y^{1-3n}$

$n)\quad \dfrac{(x-1)^{-2}(x+3)^{-1}}{(2x-4)^{-1}(x+5)^{-3}} = \dfrac{(2x-4)(x+5)^3}{(x-1)^2(x+3)}$

EXPONENTES FRACCIONARIOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

3. $a)\quad (8)^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$b)\quad (-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $\dfrac{4^{-3/2}\cdot 3^{4/3}\cdot 6^3}{6^{-3/2}\cdot 4^{5/2}\cdot 3^{-2/3}} = \dfrac{(3^{4/3})(3^{-(-2/3)})(6^3)(6^{-(-3/2)})}{(4^{-(-3/2)})(4^{5/2})} = \dfrac{(3^{4/3+2/3})(6^{3+3/2})}{4^{3/2+5/2}} = \dfrac{3^2\cdot 6^{9/2}}{4^4} = \dfrac{9\cdot\sqrt{6^9}}{256}$

Ejercicios extra clase

Realiza los siguientes ejercicios para que practiques lo que has estudiado hasta ahora; ten en cuenta que tu profesor podrá ayudarte en cualquier duda que tengas.

I. Elige la opción que consideres correcta.

1. La expresión simplificada para $\dfrac{x^5 \cdot y^3\left(w^{-5}+7\right)^2}{y^{-1}\cdot x^2\left(\dfrac{1+7w^5}{w^5}\right)^{-5}}$ es:

a) $x^3y^4w^{-35}7^7$ b) $\dfrac{x^3y^4\left(1+7w^5\right)^7}{w^{35}}$ c) $\dfrac{x^3y^4\left(1+7^7w^{35}\right)}{w^{35}}$

II. Completa los espacios en blanco:

2. A partir de la expresión $\dfrac{\Delta^9\Omega^{-1/3}}{\beta^3}$ si multiplico por ___________________ tendré $\dfrac{\Delta^6\Omega}{\beta^{-2}}$ por lo que ahora tendré que multiplicar por ____________________ para así llegar a la expresión $\dfrac{\beta^7}{\Delta^3\Omega^5}$.

3. Comenzando con la fracción ________________ multiplico por $\dfrac{a^7z^{-3}}{w^{15}}$ para llegar a $\dfrac{\Theta^3a^{-2}z^5}{w^3}$ y si quito los exponentes negativos tendré ________________ por lo multiplicaré por _________________ para tener que todo se reduce a 1.

4. Teniendo la expresión $\dfrac{\dfrac{t^{-1/3}d^{-2/9}c^{4/3}}{a^6\Theta^{-2/3}}}{\dfrac{\Theta^{5/3}d^{7/9}}{a^3}}$ tendría que multiplicar por ______________ para por fin tener $\dfrac{t\Theta^2c}{a^3d}$.

Capítulo 6. Radicales

6.1 Definición

Radical, es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ que representa la raíz enésima principal de a. El entero positivo n es el índice u orden del radial, y el número a es el subradical. El índice no se suele escribir si n = 2.
Por ejemplo, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7x^3-2y^2}$, $\sqrt{x+10}$, son radiales de índices 3, 4, 2 y subradicales 5, $7x^3-2y^2$, $x+10$, respectivamente.

6.2 Propiedades de los radicales

Son las mismas que las correspondientes de las potencias, ya que $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$. A continuación se exponen las propiedades utilizadas con más frecuencia.

Nota. Si n es par, se supone a , $b \geq 0$.

A)
$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Ejemplos. $(\sqrt[3]{6})^3 = 6,\qquad (\sqrt[4]{x^2+y^2})^4 = x^2+y^2$

B)
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2},\qquad \sqrt[7]{x^2y^5} = \sqrt[7]{x^2}\,\sqrt[7]{y^5}$

C)
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$$

Ejemplos. $\sqrt[5]{\frac{5}{32}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{2},\qquad \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(y-2)^6}} = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(y-2)^6}} = \frac{x+1}{(y-2)^2}$

D)
$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ejemplo $\sqrt[3]{(27)^4} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$

E)
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplos. $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5},\qquad \sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2},\qquad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[15]{x^2}$

6.3 Número racional.

Es un número real que se puede escribir en la forma p/q, siendo p y q enteros.

Por ejemplo, 4, 2/3, 3/8, 0,36, -2,4, $\sqrt{16}$, $\sqrt{36/49}$, $\sqrt[3]{-27}$, son números racionales, puesto que se pueden expresar como cociente de dos enteros de la forma siguiente:

$\frac{4}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{36}{100}$ o $\frac{25}{9}, \frac{-24}{10}$ o $\frac{-12}{5}, \frac{4}{1}, \frac{6}{7}, \frac{-3}{1}$

6.4 Número Irracional.

Es un número real que no se puede escribir en la forma p/q, siendo p y q enteros.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt{2/3}$, $\sqrt[3]{-4/5}$ son números irracionales.
La raíz cuadrada irracional de un número racional, como, por ejemplo, $\sqrt{5}$ ó $\sqrt{1/16}$, recibe el nombre de irracional cuadrático.

6.5 Radicales

La forma de un radical se puede modificar con alguno de los siguientes métodos:

a) Sacando fuera de la raíz las potencias enésimas de la cantidad subradical.

Ejemplos. $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3(4)} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

$$\sqrt{8x^5y^7} = \sqrt{(4x^4y^6)(2xy)} = \sqrt{4x^4y^6}\,\sqrt{2xy} = 2x^2y^3\sqrt{2xy}$$

b) Reduciendo el índice del radical.

Ejemplos. $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$, Habiendo reducido el índice de 4 a 2.

$\sqrt[6]{25x^6} = \sqrt[6]{(5x^3)^2} = (5x^3)^{2/6} = (5x^3)^{1/3} = \sqrt[3]{5x^3} = x\sqrt[3]{5}$, Habiendo reducido el índice de 6 a 3.

Nota. $\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Es <u>incorrecto</u> escribir $\sqrt[4]{(-4)^2} = (-4)^{2/4} = (-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$.

c) Racionalizando el denominador en el subradical.

Ejemplo 1. Racionalizar el denominador de $\sqrt[3]{9/2}$

Se multiplica el numerador y denominador del subradical (9/2) por un número que transforme el denominador en una potencia enésima perfecta (en este caso n = 3) y se saca dicho denominador fuera de la raíz. El número, en este caso, es 2^2. Así, pues,

$$\sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left(\frac{2^2}{2^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{9(2^2)}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$$

Ejemplo 2. Racionalizar el denominador de $\sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}}$

Para transformar $8b^6x^3$ en una cuarta potencia perfecta, multiplicamos el numerador y el denominador por $2b^2x$, con lo cual,

$$\sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3}} = \sqrt[4]{\frac{7a^3y^2}{8b^6x^3} \cdot \frac{2b^2x}{2b^2x}} = \sqrt[4]{\frac{14a^3y^2b^2x}{16b^8x^4}} = \frac{\sqrt[4]{14a^3y^2b^2x}}{2b^2x}$$

6.6 Forma simple de un radical

Un radical está en su forma más simple cuando:

a) Se han sacado fuera de la raíz todas las potencias enésimas perfectas
b) En índice de la raíz es el menor posible
c) Se ha racionalizado el denominador, es decir, cuando no existan fracciones en el subradical.

6.7 Radicales semejantes

Dos o más radicales son semejantes cuando, reducidos a su forma más simple, tiene el mismo índice y el mismo subradical.

Por ejemplo, $\sqrt{32}, \sqrt{1/2}, \sqrt{8}$ son semejantes, ya que $\sqrt{32} = \sqrt{16*2} = 4\sqrt{2}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}*\frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{8} = \sqrt{4*2} = 2\sqrt{2}$.. Todos los subradicales son 2 y todos los índices son 2.

Sin embargo, $\sqrt[3]{32}$ y $\sqrt[3]{2}$ no son semejantes, ya que $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$

6.8 Operaciones con radicales.

6.8.1 Suma entre radicales.

Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se combinan los términos con radicales semejantes.

Ejemplo:

$$\sqrt{32}-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}=\sqrt{16\cdot 2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{4\cdot 2}=4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(4-1/2-2\right)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

6.8.2 Multiplicación de radicales.

a) Para multiplicar dos o más radicales del mismo índice se aplica la propiedad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

Ejemplos.

$$\left(2\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{16}\right)=(2)(3)(\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{16})=6\sqrt[3]{16\cdot 4}=6\sqrt[3]{64}=6\cdot 4=24$$

$$\left(3\sqrt[4]{x^2y}\right)\left(\sqrt[4]{x^3y^2}\right)=3\sqrt[4]{\left(x^2y\right)\left(x^3y^2\right)}=3\sqrt[4]{x^5y^3}=(3x)\sqrt[4]{xy^3}$$

b) Para multiplicar radicales de índices distintos conviene utilizar exponentes fraccionarios y aplicar las propiedades de la potenciación

Ejemplos.

$$\sqrt[3]{5}\,\sqrt{2}=5^{1/3}\cdot 2^{1/2}=5^{2/6}\cdot 2^{3/6}=(5^2\cdot 2^3)^{1/6}=(25\cdot 8)^{1/6}=\sqrt[6]{200}$$

$$\sqrt[3]{4}\,\sqrt{2}=\sqrt[3]{2^2}\,\sqrt{2}=2^{2/3}\cdot 2^{1/2}=2^{4/6}\cdot 2^{3/6}=2^{7/6}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$$

6.8.3 División de radicales.

a) Para dividir dos radicales del mismo índice se aplica la propiedad C, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ y se simplifica a continuación.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{3}\cdot\frac{3^2}{3^2}}=\sqrt[3]{\frac{45}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

También se puede racionalizar directamente el denominador.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{5\cdot 3^2}}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{\sqrt[3]{45}}{3}$$

b) Para dividir dos radicales de índices distintos conviene utilizar exponentes fraccionarios y aplicar las propiedades de la potenciación.

Ejemplos. $$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2}}=\frac{6^{1/2}}{2^{1/4}}=\frac{6^{2/4}}{2^{1/4}}=\sqrt[4]{\frac{6^2}{2}}=\sqrt[4]{\frac{36}{2}}=\sqrt[4]{18}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}}=\frac{2^{2/3}}{2^{1/2}}=\frac{2^{4/6}}{2^{3/6}}=2^{1/6}=\sqrt[6]{2}$$

6.8.4 Irracionales conjugados.

Los binomios irracionales cuadráticos $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ y $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ se denominan conjugados entre sí. Por ejemplo, $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ y $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$ son conjugados.

PROBLEMAS RESUELTOS

Reducción de una expresión radical a su forma más simple.

1. *a*) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{8 \cdot 10} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 10} = 2\sqrt[3]{10}$

c) $5\sqrt[3]{243} = 5\sqrt[3]{27 \cdot 9} = 5\sqrt[3]{3^3 \cdot 9} = 15\sqrt[3]{9}$

d) $\sqrt[3]{648} = \sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3} = 6\sqrt[3]{3}$

e) $a\sqrt{9b^4c^3} = a\sqrt{3^2b^4c^2 \cdot c} = 3ab^2c\sqrt{c}$

f) $\sqrt[6]{343} = \sqrt[6]{7^3} = 7^{3/6} = 7^{1/2} = \sqrt{7}$

Obsérvese que $a \geqq 0$. Véase *k*).

g) $\sqrt[6]{81a^2} = \sqrt[6]{3^4a^2} = 3^{4/6}a^{2/6} = 3^{2/3}a^{1/3} = \sqrt[3]{9a}$

h) $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}} = \sqrt[3]{4^3x^6 \cdot xy^{-6}} = 4x^2y^{-2}\sqrt[3]{x} = \dfrac{4x^2}{y^2}\sqrt[3]{x}$

i) $\sqrt[5]{(72)^4} = (72)^{4/5} = (8 \cdot 9)^{4/5} = (2^3 \cdot 3^2)^{4/5} = 2^{12/5} \cdot 3^{8/5}$

$= (2 \cdot 2^{2/5})(3 \cdot 3^{3/5}) = 2^2 \cdot 3\sqrt[5]{2^2 \cdot 3^3} = 12\sqrt[3]{108}$

j) $(7\sqrt[3]{4ab})^2 = 49(4ab)^{2/3} = 49\sqrt[3]{16a^2b^2} = 98\sqrt[3]{2a^2b^2}$

k) $2a\sqrt{a^2+6a+9} = 2a\sqrt{(a+3)^2} = 2a(a+3)$. Hay que tener en cuenta que $\sqrt{(a+3)^2}$ es un positivo o cero; por tanto, $\sqrt{(a+3)^2} = a+3$ solo si $a+3 \geq 0$. Si se quiere hacer extensión a valore de a tales que $a+3<0$, tendremos $\sqrt{(a+3)^2} = |a+3|$.

l) $\dfrac{[illegible]}{\sqrt{x}+5} = \dfrac{[illegible]}{\sqrt{x}+5} = \sqrt{x}-5$

m) $\sqrt{12x^4 - 36x^2y^2 + 27y^4} = \sqrt{3(4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4)}$

$= \sqrt{3(2x^2 - 3y^2)^2} = (2x^2 - 3y^2)\sqrt{3}$

Obsérvese que esto es cierto si $2x^2 \geqq 3y^2$. Véase *k*).

n) $\sqrt[n]{a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2}} = (a^nb^{2n}c^{3n+1}d^{n+2})^{1/n} = ab^2c^3c^{1/n}dd^{2/n} = ab^2c^3d\sqrt[n]{cd^2}$

Ejercicios extra clase

En esta sección practica los conceptos adquiridos en este capítulo; consulta cualquier duda con tu asesor.

I. Relaciona ambas columnas.

a) $\sqrt[7]{(5x+3)^2}=\sqrt[7]{25x^2+9}=(25x^2)^{1/7}+9^{1/7}$

b) $\left(\dfrac{\dfrac{5x^2+2}{3+x^2}}{\dfrac{3}{x^8}}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\dfrac{5x^{10}+2x^8}{9+3x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{81x^9y^{10}}\cdot\sqrt[4]{625x^{16}y^{12}}}{\sqrt[4]{2401x^4y^8}}=$

$\dfrac{\sqrt[3]{x^3y^2}}{\sqrt[3]{x+1}}=$

$\dfrac{6\cdot\sqrt[3]{24}-2\cdot\sqrt[3]{192}-4\cdot\sqrt[3]{375}}{8\cdot\sqrt[3]{24}+3\cdot\sqrt[3]{648}}=$

( ) No tiene solución

( ) -16

( ) Incorrecto

( ) $\dfrac{15}{7}x^{5/4}y^{6/4}$

( ) Correcto

( ) $15/7\, x^5y^3\sqrt[4]{xy^2}$

$\dfrac{\sqrt[3]{\left(x^3y^2+xy^2\right)^2}}{x+1}$

Capítulo 7. Ecuaciones en General

7.1 Definición

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma.

Una ecuación que solo se verifique para ciertos valores de las letras (o incógnitas) recibe el nombre de ecuación condicional o, simplemente, ecuación.

Una ecuación que se verifique para todos los valores permitidos de sus letras (o incógnitas) recibe el nombre de identidad. Valores permitidos son aquellos para los que están definidos los miembros de la ecuación.

Por ejemplo:

1) $x + 5 = 8$ se verifica solo para $x = 3$; es una ecuación condicional.

2) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ se verifica para todos los valores de x e y; es una identidad.

3) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$ se verifica para todos los valores excepto para los no permitidos $x = 2$, $x = 3$; para estos valores, la operación se reduce a una división por cero, lo cual carece de sentido. Como la ecuación se verifica para todos los valores permitidos de x, es una identidad.

Para representar una identidad se emplea el símbolo Ξ en lugar del símbolo =.

Las soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad, es decir, se igualan ambos miembros. Las soluciones satisfacen a la ecuación. Si la ecuación solo contiene una incógnita, las soluciones se denominan raíces de la ecuación. Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones. Por ejemplo, $x = 2$ es una raíz, o solución, de la ecuación $2x + 3 = 7$, ya que sustituyendo $x = 2$ en ésta, se obtiene $2(2) + 3 = 7$, es decir, los dos miembros se hacen iguales y la ecuación se convierte en una identidad. Análogamente, tres soluciones de la ecuación $2x + y = 4$ son: $x = 0$, $y = 4$, $x = 1$, $y = 2$; $x = 5$, $y = -6$.

7.2 Operaciones aplicadas en la transformación de ecuaciones.

Si se suman miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad. Por ejemplo, en la igualdad x – y = z, podemos sumar y a ambos miembros, con lo que se resulta x = y + z.

a) Si se restan miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad. Por ejemplo, en la igualdad x + 2 = 5, podemos restar 2 a ambos miembros, con lo que se obtiene x = 3.

Nota. Como consecuencia de a) y b) se deduce que para trasponer un término de una ecuación de un miembro a otro no hay más que cambiarlo de signo.

Ejemplo

si $3x + 2y - 5 = x - 3y + 2,$

tendremos $3x - x + 2y + 3y = 5 + 2$ o $2x + 5y = 7.$

b) Si se multiplican miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad. Por ejemplo, se multiplican por 4 los dos miembros de la igualdad ¼ y = $2x^2$ se obtiene y = $8x^2$.

Análogamente, si los dos miembros de $\frac{9}{5}C = F - 32$ se multiplican por 5/9 se obtiene $C = \frac{9}{5}(F - 32)$.

c) Si se dividen miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad, siempre que no se divida por cero.

Por ejemplo, si se dividen los dos miembros de la igualdad -4x = -12 por -4, se obtiene x = 3.

Análogamente, en la igualdad V = RI se pueden dividir los dos miembros por R $\neq$ 0, obteniéndose I = V/R.

d) Si se elevan al mismo exponente los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad.

Por ejemplo, si $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, tendremos $T^2 = \left(2\pi\sqrt{l/g}\right)^2 = 4\pi^2 l/g$

e) Si se extrae la raíz enésima de los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad. por ejemplo, si $r^3 = \frac{3V}{4\pi}$, resulta $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$,

f) Los recíprocos de los miembros de una igualdad dan lugar a otra igualdad, siempre que no tenga lugar la división por cero.

Por ejemplo, si $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, tendremos x = 3. Análogamente, si $\frac{1}{R}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ se verifica $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

Las operación *a)* a *f)* se llaman axiomas de la igualdad.

7.3 Ecuaciones equivalentes.

Son las que tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo, x – 2 = 0 y 2x = 4 tienen la solución común x = 2 y, por tanto, son equivalentes. Sin embargo, x – 2 = 0 y x^2 -2x = 0 no son equivalentes, ya que x^2 – 2x = 0 tiene, además, la solución x = 0.

Las operaciones anteriores aplicadas a la transformación de ecuaciones no dan lugar, en todos los casos, a ecuaciones equivalentes a las primitivas. La aplicación de estas operaciones puede conducir a ecuaciones derivadas que tengan distintas soluciones que la ecuación original.

Si se llega a una ecuación con más soluciones que la original, las soluciones nuevas se denominan extrañas y la ecuación derivada se llama redundante con respecto a la original. Si se llega a una ecuación con menos soluciones que la original, la ecuación derivada recibe el nombre de defectiva con respecto a la original.

Las operaciones *a)* y *b)* siempre conducen a ecuaciones equivalentes. Sin embargo, c) y e) pueden dar lugar a ecuaciones redundantes y soluciones extrañas y d) y f) a ecuaciones defectivas.

7.4 Fórmula

Una fórmula es una ecuación que expresa un hecho general, una regla o un principio.

Por ejemplo, la formula de geometría $A=\pi r^2$ expresa el área A de un circulo en función de su radio r.

La fórmula física $s=\frac{1}{2}gt^2$, en la que g es la aceleración de la gravedad y que vale, aproximadamente, 9,81 metros por segundo en cada segundo, expresa la relación que existe entre el espacio s, en metros, que recorre un cuerpo que cae libremente partiendo del reposo, y el tiempo t, en segundos, que emplea en el movimiento.

Ejercicios extra clase

Aquí tienes unos sencillos ejercicios, resuélvelos y aclara todas tus dudas con ayuda de tu profesor.

I. Elige la opción que consideres adecuada:

1. Si tengo la ecuación $3x^2 + 2x + 3 = 6$ y la multiplico por 5, entonces me quedará:

a) $15x^2 + 10x + 15 = 6$ b) $3x^2 + 2x + 3 = 30$ c) $15x^2 + 10x + 15 = 30$

2. Una ecuación equivalente a $7x^2 + 3x + 5 = 8 - 3x^2 + 6x$ es:

a) $10x^2 + 3x = 3$ b) $10x^2 - 3x - 3 = 0$ c) $10x^2 - 3x = -3$

3. Si tengo $\frac{3x+1}{y+2} = 5x^2 + 3$ entonces:

a) $y = \frac{3x+1}{5x^2+3} - 2$ b) $y = \frac{3x+1-2}{5x^2+3}$ c) $y = \frac{5x^2+3}{3x+1} - 2$

4. Si multiplico la ecuación $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} = 0$ por 56, tendré:

a) $7x^3 + 8x^2 + 14x + 42 = 0$ b) $7x^3 + 8x^2 + 14x + 42 = 1/56$
c) $7x^3 + 8x^2 + 14x + 168 = 0$

5. Si partimos de $5x^2 + 7y + 8 = 2$ y elevo al cuadrado el lado derecho de la ecuación, una ecuación equivalente tendrá que ser:

a) $25x^4 + 49y^2 + 64 = 4$ b) $(5x^2 + 7y + 8)^2 = 4$ c) $(5x^2 + 7y + 8)^2 = 2$

Capítulo 8. Ecuaciones lineales con una incógnita

Una **ecuación** lineal que contiene **una incógnita,** es de la forma ax + b = 0, siendo a ≠ 0 y b constante. Su solución viene dada por x = - b/a

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $x + 1 = 5, \quad x = 5 - 1, \quad x = 4.$

Comprobación:

Haciendo x = 4 en la ecuación dada se obtiene 4 + 1 = 5, 5 = 5.

b) $3x - 7 = 14, \quad 3x = 14 + 7, \quad 3x = 21, \quad x = 7.$

Comprobación: 3(7) – 7 = 14, 14 = 14.

c) $3x + 2 = 6x - 4, \quad 3x - 6x = -4 - 2, \quad -3x = -6, \quad x = 2.$

d) $x + 3(x - 2) = 2x - 4, \quad x + 3x - 6 = 2x - 4, \quad 4x - 2x = 6 - 4, \quad 2x = 2, \quad x = 1.$

e) $3x - 2 = 7 - 2x, \quad 3x + 2x = 7 + 2, \quad 5x = 9, \quad x = 9/5.$

f) $2(t + 3) = 5(t - 1) - 7(t - 3), \quad 2t + 6 = 5t - 5 - 7t + 21, \quad 4t = 10, \quad t = 10/4 = 5/2.$

g) $3x + 4(x - 2) = x - 5 + 3(2x - 1), \quad 3x + 4x - 8 = x - 5 + 6x - 3, \quad 7x - 8 = 7x - 8.$
Esta es una identidad y se verifica para todos los valores de x.

h) $\dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{2x + 4}{5}, \quad 5(x - 3) = 2(2x + 4), \quad 5x - 15 = 4x + 8, \quad x = 23.$

i) $3 + 2[y - (2y + 2)] = 2[y + (3y - 1)], \quad 3 + 2[y - 2y - 2] = 2[y + 3y - 1],$
$3 + 2y - 4y - 4 = 2y + 6y - 2, \quad -2y - 1 = 8y - 2, \quad -10y = -1, \quad y = 1/10.$

j) $(s + 3)^2 = (s - 2)^2 - 5, \quad s^2 + 6s + 9 = s^2 - 4s + 4 - 5, \quad 6s + 4s = -9 - 1, \quad s = -1.$

k) $\dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{x - 4}{x + 4}, \quad (x - 2)(x + 4) = (x - 4)(x + 2), \quad x^2 + 2x - 8 = x^2 - 2x - 8, \quad 4x = 0, \quad x = 0.$

Comprobación: $\dfrac{0 - 2}{0 + 2} = \dfrac{0 - 4}{0 + 4}, \quad -1 = -1.$

l) $\dfrac{3x + 1}{x + 2} = \dfrac{3x - 2}{x + 1}, \quad (x + 1)(3x + 1) = (x + 2)(3x - 2), \quad 3x^2 + 4x + 1 = 3x^2 + 4x - 4 \text{ o } 1 = -4.$

No hay ningún valor de x que satisfaga esta ecuación.

n) $\frac{5}{x}+\frac{5}{2x}=6.$ Multiplicando por $2x$, $5(2)+5=12x$, $12x=15$, $x=5/4$.

o) $\frac{x+3}{2x}+\frac{5}{x-1}=\frac{1}{2}$. Multiplicando por $2x(x-1)$, que es el denominador común mínimo de las fracciones.

$(x+3)(x-1)+5(2x)=x(x-1)$, $x^2+2x-3+10x=x^2-x$, $13x=3$, $x=3/13$.

p) $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{16}{x^2-9}$. Multiplicando por $(x-3)(x+3)$ o x^2-9.

$2(x+3)-4(x-3)=16$, $2x+6-4x+12=16$, $-2x=-2$, $x=1$.

q) $\frac{1}{y}-\frac{1}{y+3}=\frac{1}{y+2}-\frac{1}{y+5}$, $\frac{(y+3)-y}{y(y+3)}=\frac{(y+5)-(y+2)}{(y+2)(y+5)}$, $\frac{3}{y(y+3)}=\frac{3}{(y+2)(y+5)}$.

$(y+2)(y+5)=y(y+3)$, $y^2+7y+10=y^2+3y$, $4y=-10$, $y=-5/2$.

r) $\frac{3}{x^2-4x}-\frac{2}{2x^2-5x-12}=\frac{9}{2x^2+3x}$ o $\frac{3}{x(x-4)}-\frac{2}{(2x+3)(x-4)}=\frac{9}{x(2x+3)}$.

Multiplicando por $x(x-4)(2x+3)$, que es el denominador común mínimo de las fracciones.

$3(2x+3)-2x=9(x-4)$, $6x+9-2x=9x-36$, $45=5x$, $x=9$.

8.1 Ecuaciones Literales

En algunas ocasiones, se utilizan letras del alfabeto simbolizando una variable o número, por lo cual es necesario despejar la incógnita x.

Ejemplos: despejar x en los siguientes ejercicios.

a) $2x-4p=3x+2p$, $2x-3x=2p+4p$, $-x=6p$, $x=-6p$.

b) $ax+a=bx+b$, $ax-bx=b-a$, $x(a-b)=b-a$, $x=\frac{b-a}{a-b}=-1$ siempre que $a\neq b$.

Si $a=b$ la ecuación es una identidad y se verifica para todo valor de x.

c) $2cx+4d=3ax-4b$, $2cx-3ax=-4b-4d$, $x=\frac{-4b-4d}{2c-3a}=\frac{4b+4d}{3a-2c}$ siempre que $3a\neq 2c$.

Si $3a=2c$ no hay solución a menos que $d=-b$, en cuyo caso la ecuación dada es una identidad.

d) $\frac{3x+a}{b}=\frac{4x+b}{a}$, $3ax+a^2=4bx+b^2$, $3ax-4bx=b^2-a^2$, $x=\frac{b^2-a^2}{3a-4b}$ (siempre que $3a\neq 4b$).

8.2 Representación de palabras por símbolos.

En diversas ocasiones, se nos presentan problemas reales en dónde se hace necesario representarlos en forma matemática para así poder encontrar una solución al mismo; en el planteamiento necesitamos expresar los datos que se tienen y aquellos que se desean conocer como una relación matemática; para ello, utilizamos símbolos y operaciones matemáticas que describen el fenómeno o situación estudiados.

Ejemplos: expresar por medio de símbolos algebraicos y operaciones matemáticas, los siguientes casos:

- El doble de un número más uno.

Sea x = el número. Entonces 2x = doble del número, y el doble del número más uno es = 2x + 1.

- El quíntuplo de un número menos tres.

Sea x = el número. El quíntuplo del número menos tres es = 5x – 3.

- Dos números cuya suma es 100.

Si x = uno de los números, entonces 100 – x = al otro número.

- El precio de una unidad más $5000 resulta ser la cantidad de $15 000.

Siendo U el precio de la unidad, entonces U + 5000 = 15 000.

- Tenemos un triángulo en dónde uno de los lados mide 2m, el segundo lado mide 1/4 de su perímetro y el tercer lado 1/7 del perímetro. ¿Cómo podemos plantear una ecuación para encontrar el perímetro?

Asignamos a la cantidad del perímetro la variable P, sabemos que el perímetro resulta ser la suma de los lados, por tanto perímetro = lado1 + lado2 + lado3, por tanto:

P = 2 + 1/4P + 1/7P para poder conocer el perímetro tendremos que simplificar la relación anterior:

$$P = 2 + \frac{P}{4} + \frac{P}{7}$$

$$P = \frac{56 + 7P + 4P}{28}$$

$$P = \frac{56 + 11P}{28}$$

$$28P = 56 + 11P$$

$$28P - 11P = 56$$

$$17P = 56$$

$$P = {}^{56}\!/_{17}\, m$$

Ejercicios extra clase

A continuación tienes estos ejercicios para que practiques lo visto en este capítulo.

I. Resuelve los siguientes ejercicios de planteamiento.

1. Una torre de perforación en el Golfo de México se coloca de una manera que un quinto de su altura está en arena, 20m están en el agua y dos tercios en el aire. ¿Cuál es la altura total de la torre?

2. Durante un viaje de campamento en los bosques del norte de Canadá, una pareja recorrió un tercio del camino en bote, 1 Km a pie y un sexto del camino a caballo. ¿Qué tan largo fue el viaje?

3. Un número multiplicado por 5, sumado con el mismo número multiplicado por 6 da 55. ¿Cuál es ese número?

4. El doble de un número aumentado en 12 es igual a su triple disminuido en 5. ¿Cuál es el número?

5. Hace 6 años un padre tenía el cuádruplo de la edad de su hijo. En 10 años más tendrá solo el doble. Encuentra la edad actual del padre y del hijo.

Capítulo 9. Sistemas de ecuaciones lineales

9.1 Definición, ecuación lineal con dos incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas (o variables) x e y es de la forma:

$$ax + by = c,$$

En donde a, b, c son constantes y a, b distintos de cero. Dos ecuaciones de este tipo

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas. Todo par de valores de x e y que satisfagan ambas ecuaciones, simultáneamente, recibe el nombre de solución del sistema.

Por ejemplo, la solución del sistema:

$$x + y = 7$$
$$x - y = 3$$
$$es:$$
$$x = 5 \Leftrightarrow y = 2$$

9.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

A continuación, se exponen tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

a) **Método de reducción**. Cuando sea necesario, se pueden multiplicar las ecuaciones dadas por números, de manera que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sea el mismo. Si los signos de los términos de igual coeficiente son distintos, se suman las ecuaciones; en caso contrario, se restan.

Consideremos:

$$(1) \quad 2x - y = 4$$
$$(2) \quad x + 2y = -3.$$

Para eliminar y, se multiplica (1) por 2 y se suma con (2), obteniendo:

2 X (1): $4x + 2y = 8$

(2): $x + 2y = -3$

Suma : $5x = 5$ por lo tanto **x = 1**

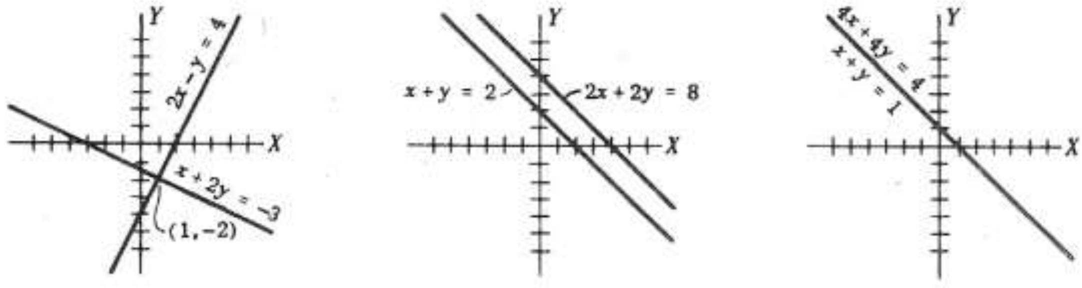
Sust... 4, o sea **y = -2.**
Por ... r (1) y (2) es **x = 1, y = -2.**
Comprobación: sustituyendo x = 1, y = -2 en (2) se obtiene 1 + 2(-2) = -3, -3= -3

b) **Método de sustitución.** Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.

Por ejemplo, consideremos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) anteriores. De (1) se obtiene y = 2x – 4 y sustituyendo este valor en (2) resulta x + 2(2x – 4) = -3, de la que se deduce la solución x = 1. Sustituyendo x = 1 en (1), o en (2), se obtiene y = -2.

c) **Método grafico.** Consiste en trazar, en un sistema de coordenadas dado, las dos rectas que representan las ecuaciones. La solución del sistema viene dada por las coordenadas (x, y) del punto de intersección de ambas. De la Fig. (a) se deduce que la solución del sistema formado por (1) 2x – y = 4 y (2) x + 2y = -3 es x = 1, y = -2, o bien (1, -2).

Si las rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones es incompatible, es decir, no tiene solución. Por ejemplo, el sistema formado por (3) x + y = 2 y (4) 2x + 2y = 8 es incompatible, como indica la Fig. (b). obsérvese que si se multiplica la ecuación (3) por 2 se obtiene 2x + 2y = 4 que, evidentemente, es incompatible con (4).



a) *Ecuaciones compatibles*
(1) $2x - y = 4$
(2) $x + 2y = -3$

b) *Ecuaciones incompatibles*
(3) $x + y = 2$
(4) $2x + 2y = 8$

c) *Ecuaciones dependientes*
(5) $x + y = 1$
(6) $4x + 4y = 4$

Las ecuaciones dependientes están representadas por una misma recta, Por consiguiente, todos los puntos de la recta constituyen una solución y, en definitiva, el sistema tendrá infinitas soluciones. Por ejemplo, (5) x + y = 1 y (6) 4x + 4y = 4 son ecuaciones dependientes; obsérvese que si se multiplica por 4 la ecuación (5) se obtiene la ecuación (6).

Ejemplos resueltos:

Resolver los sistemas siguientes:

1. (1) $2x - y = 4$
(2) $x + y = 5$

Primer Método:

Sumando (1) y (2) se obtiene $3x = 9$, $x = 3$.
Sustituyendo $x = 3$ en (1) o en (2). La solución es $x = 3$, $y = 2$ o $(3, 2)$.

Segundo Método:

De (1) se obtiene $y = 2x - 4$ y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se llega a $x + 2x - 4 = 5$, $3x = 9$, $x = 3$. Sustituyendo $x = 3$ en (1) o en (2) se obtiene $y = 2$.

Comprobación: $2x - y = 2(3) - 2 = 4$ y $x + y = 3 + 2 = 5$.

2. (1) $3t - 2v = 1$
(2) $8t + 5v = 75$

Primer método:

Para poder eliminar una variable en alguna ecuación, escogemos cuál hemos de eliminar y multiplicamos por el número que acompañe a esta misma variable en la segunda ecuación; luego, restamos las ecuaciones obtenidas.
Para nuestro caso elegiremos quitar la variable v, por lo que a la ecuación (1) hemos de multiplicarla por 5, y a la ecuación 2 multiplicarla por 2; como en este caso, los signos son contrarios, sumaremos las ecuaciones en lugar de restarlas:

$$
\begin{array}{rl}
 & 15t - 10v = 5 \\
+ & 16t + 10v = 150 \\
\hline
 & 31t \quad = 155
\end{array}
$$

por lo que $t = 155/31$ y $\mathbf{t = 5}$

Luego, sustituimos en alguna ecuación el valor de $t = 5$ y tendremos:

$3t - 2v = 1 \rightarrow 3(5) - 2v = 1 \rightarrow 15 - 2v = 1 \rightarrow 2v = 15 - 1 \rightarrow v = 14/2$ y $\mathbf{v = 7}$

De la ecuación (1) despejamos a t, por lo que:

(1) 3t – 2v = 1 → t = (1 + 2v)/3

Sustituimos en la ecuación (2) 8t + 5v = 75 de donde tenemos:

$$8\left(\frac{1+2v}{3}\right)+5v=75$$
$$\frac{8}{3}+\frac{16v}{3}+5v=75$$
$$\frac{16v}{3}+5v=75-\frac{8}{3}$$
$$\frac{16v+15v}{3}=\frac{217}{3}$$
$$31v=217$$
$$\therefore v=7$$

Y sustituyendo el valor de **v** en el despeje de **t** tendremos:

$$t=\left(\frac{1+2v}{3}\right)$$
$$t=\left(\frac{1+2(7)}{3}\right)$$
$$t=\left(\frac{1+14}{3}\right)$$
$$t=\frac{15}{3}$$
$$t=5$$

Ejercicios extra clase

Resuelve los siguientes ejercicios; no dejes ninguna duda sin aclarar, acude con tu profesor, él podrá ayudarte.

I. Elige la opción que consideres correcta:

1. Si 6 revistas cuestan $n y 4 diarios cuestan $m ¿Cuánto cuestan 3 revistas y 2 diarios?

a) $\frac{n+m}{5}$ b) $\frac{n+m}{6}$ c) $\frac{3n+2m}{6}$ d) $\frac{n+m}{2}$ e) N. A.

II. Encuentra la solución a los siguientes problemas:

2. Juan compró una computadora y un reproductor DVD por $27 000 y los vendió por $30 000. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta de la computadora ganó el 10% y en la del reproductor 15%?

3. En una granja se crían vacas y gallinas; en total hay 45 cabezas y 156 patas ¿Cuántas vacas y gallinas hay en la granja?

4. Miguel le dice a Pepe, "*el dinero que tengo es el doble del que tienes tu*", y Pepe contesta: "*si tú me das 6 pesos, tendremos los dos igual cantidad*". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

5. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de las cifras de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras ¿Cuál es ese número?

Capítulo 10. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

10.1 Definición

Una ecuación de segundo grado en x es de forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

Siendo a, b, y c constantes y $a \neq 0$.

Por ejemplo, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $2x^2 + x - 6 = 0$ y $3x^2 - 5 = 0$, son ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Las dos últimas ecuaciones se pueden dividir por 2 y 3, respectivamente, obteniéndose $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$ y $x^2 - \frac{5}{3} = 0$, siendo en ambos casos el coeficiente de x^2 igual a 1.

Una ecuación cuadrática pura es aquella que carece de término en x; por ejemplo, $4x^2 - 5 = 0$.

10.2 Resolución de una ecuación de segundo grado.

Resolver una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es hallar los valores de x que la satisfagan. Estos valores reciben el nombre de *soluciones* o *raíces* de la ecuación dada.

Por ejemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$ se satisface para x = 2 y x = 3. Por tanto, x = 2 y x = 3 son soluciones o raíces de la citada ecuación.

10.2.1 Métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado.

A) Ecuaciones cuadráticas puras.

Ejemplos:

1. $x^2 - 4 = 0$. Tendremos $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, y las raíces son x = 2, -2.

2. $2x^2 - 21 = 9$. Tendremos $x^2 = 21/2$ y las raíces son:

$$x = \pm\sqrt{21/2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{42}.$$

3. $x^2 + 9 = 0$. Tendremos $x^2 = -9$ y las raíces son $x = \pm 3i$.

B) Por descomposición en factores.

Ejemplos:

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$ se puede escribir en la forma $(x - 3)(x - 2) = 0$. El producto de los dos factores será cero cuando lo sea uno cualquiera de ellos o ambos a la vez. Si $x - 3 = 0$, $x = 3$; si $x - 2 = 0$, $x = 2$. Por consiguiente, las soluciones son $x = 3$, $x = 2$.

5. $3x^2 + 2x - 5 = 0$ se puede escribir en la forma $(3x + 5)(x - 1) = 0$. Por tanto, de $3x + 5 = 0$ y $x \tau 1 = 0$ se obtienen las soluciones $x = -5/3$ y $x = 1$.

6. $x^2 - 4x + 4 = 0$ se puede escribir en la forma $(x - 2)(x - 2) = 0$; la solución por lo tanto será: $x = 2$.

C) Formando un cuadrado perfecto.

Ejemplos:

7. Resolver $x^2 - 6x - 2 = 0$.

Se escribe en un miembro los términos con la incógnita y se pasa el término independiente al otro miembro.
$x^2 - 6x = 2$

Sumando 9 a ambos miembros el primero se transforma en un cuadrado perfecto, es decir,
$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9$ o $(x - 3)^2 = 11$

de donde $x - 3 = \pm\sqrt{11}$ y las raíces son $x = 3 \pm \sqrt{11}$.

Nota. Para aplicar este método (1) el coeficiente de x^2 debe ser 1 y (2) el número que hay que sumar a los dos miembros ha de ser el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

8. Resolver $3x^2 - 5x + 1 = 0$.

Dividiendo por 3, $x^2 - \frac{5x}{3} = -\frac{1}{3}$.

Sumando $\{\frac{1}{2}(-\frac{5}{3})\}^2 = \frac{25}{36}$ a los dos miembros,

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{13}{36},\ (x - \frac{5}{6})^2 = \frac{13}{36},$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{\sqrt{13}}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

D) Aplicando la fórmula general.

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En la que $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática.

Para deducir esta fórmula, véase el Problema 5.

Ejemplo:

9. Resolver $3x^2 - 5x + 1 = 0$. En este caso a = 3, b = –5, c = 1 por tanto:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$ como en el Ejemplo 8.

E) Gráficamente

Las raíces, o soluciones, reales de $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores de x que corresponden a y = 0 en la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Esto es, las soluciones son las abscisas de los puntos en los que la parábola corta el eje x. Si la curva no corta el eje x, las raíces son imaginarias.

10.3 Suma y producto de las raíces de una ecuación cuadrática.

La suma y el producto de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dados por:

$$S = -\frac{b}{a} \text{ y } P = \frac{c}{a}.$$

Por ejemplo, en $2x^2 + 7x - 6 = 0$ tenemos a = 2, b = 7, c = –6 con lo que:

$$S = -7/2 \text{ y } P = -6/2 = -3.$$

10.4 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Se deduce, pues que una ecuación de segundo grado cuyas raíces son r_1 y r_2 presenta la forma $x^2 - Sx + P = 0$, siendo $S = r_1r_2$. Por tanto, la ecuación de segundo grado cuyas raíces son x = 2 y x = –5 es $x^2 - (2 - 5)x + 2(-5) = 0$, es decir, $x^2 + 3x - 10 = 0$.

10.4.1 Carácter de las raíces

El carácter de las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ viene determinado por su discriminante $b^2 - 4ac$.

Suponiendo que a, b, c, son números reales, se tiene:

1) Si $b^2 - 4ac > 0$. las raíces son reales y distintas.
2) Si $b^2 - 4ac = 0$. las raíces son reales e iguales.
3) Si $b^2 - 4ac < 0$. las raíces son imaginarias conjugadas.

En el caso de que los coeficientes a, b, c, sean números racionales, se tiene:

1) Si $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto $\neq 0$, las raíces son reales, racionales y distintas.
2) Si $b^2 - 4ac = 0$. las raíces son reales, racionales e iguales.
3) Si $b^2 - 4ac > 0$, pero no es un cuadrado perfecto, las raíces son reales, irracionales y distintas.
4) Si $b^2 - 4ac < 0$. las raíces son imaginarias conjugadas.

Por ejemplo, $2x^2 + 7x - 6 = 0$, cuyo discriminante es $b^2 - 4ac = 7^2 - 4(2)(-6) = 97$, tiene raíces reales, irracionales y distintas.

10.5 Ecuación Irracional

Es aquella que tiene una, o más incógnitas, bajo el signo de una raíz (radical).

Por ejemplo $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1$ y $\sqrt[3]{y} = \sqrt{y-4}$ son ecuaciones irracionales.

Para resolver una ecuación irracional, se despeja uno de los radicales, aislándolo en un miembro de la ecuación, y se pasan todos los demás términos al otro miembro. Elevando ambos miembros de la ecuación a una potenciaigual al índice del radical, desaparecerá dicha raíz. Este proceso continúa hasta que se hayan eliminado todos los radicales presentes.

Ejemplo

10. Resolver $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1$.

Trasponiendo términos $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 1$.

Elevando al cuadrado, $x + 3 = x + 2\sqrt{x} + 1$ o sea $\sqrt{x} = 1$.

Finalmente, elevando al cuadrado los dos miembros de $\sqrt{x} = 1$ se obtiene $x = 1$.

Comprobación. $\sqrt{1+3} - \sqrt{1} = 1$, $2 - 1 = 1$.

Es muy importante comprobar los valores obtenidos ya que al aplicar este método se introducen, frecuentemente, soluciones extrañas a la ecuación que habrá que rechazar.

10.6 Ecuación de tipo cuadrático.

Una ecuación de tipo cuadrático es de la forma $az^{2n} + bz^n + c = 0$, siendo $a \neq 0$, b, c, y $n \neq 0$, constantes y z una función de x. Haciendo el cambio bde variable $z^n = u$, la ecuación se transforma en $au^2 + bu + c = 0$, que es una ecuación de segundo grado en la variable u. Con los valores obtenidos de u se pueden obtener los correspondientes de z y, de estos, hallar los de x.

Ejercicios extra clase

Resuelve los siguientes ejercicios para que practiques lo estudiado en clases:

1. La solución a la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ es:

a) No existe b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ c) $x_1 = -1$ y $x_2 = -2$ d) $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$

2. Los valores solución para $3x^2 - 5 = 20 - x^2$ son:

a) $x = 5/2$ b) No existe c) $x = \pm 5/2$ d) $x = \pm 2/5$ e) $x = 2/5$

3. Las soluciones para la ecuación $12x^2 - 2x - 2 = 0$ son:

a) $x_1 = -1/2$ y $x_2 = 1/3$ b) $x_1 = \pm 1/3$ y $x_2 = \pm 1/2$ c) $x_1 = -1/3 + 1/2$

d) $x_1 = 1/2$ y $x_2 = -1/3$

4. Las raíces de $2x^2 - 5x - 3 = 0$ son:

a) Reales y distintas b) Imaginarias conjugadas c) Reales e iguales

d) No existen

5. Las raíces de $15x^2 + 2x - 2 = 0$ son:

a) Reales, racionales iguales b) Reales, racionales distintas

c) Reales, irracionales iguales d) Reales, irracionales distintas

Capítulo 11. Logaritmos

11.1 Definición

El logaritmo de un número positivo N en base b, positivo y distinto de la unidad, es el exponente x a que hay que elevar la base para obtener dicho número.

Es decir $b^x = N$, o bien $x = \log_b N$.

Ejemplos:

1. Como $3^2 = 9$, el logaritmo de 9 en base 3 es 2, es decir, $2 = \log_3 9$.

2. $\log_2 8$ es un número x al que se debe elevar la base 2 para obtener 8, es decir, $2^x = 8$, $x = 3$. Por tanto, $\log_2 8 = 3$.

Las relaciones $b^x = N$ y $x = \log_b N$ son equivalentes: $b^x = N$ es la forma exponencial, y $x = \log_b N$ la forma logarítmica. Como consecuencia, a cada propiedad de la potenciación, le corresponde una propiedad de la logaritmación.

11.2 Sistemas de logaritmos

Los sistemas de logaritmos generalmente usados son:

I.-Logaritmos Comunes o de Briggs, es decir son aquellos cuya base es 10,por ello también se conocen como decimales, $\log_{10} X = \log X$ para todo $X>0$,

II.-Logaritmos Naturales o Neperianos son aquellos cuya base es un numero inconmensurable e igual a 2.71828182845..., $\mathrm{Log}_e X = \ln X$ para todo $X>0$.

11.3 Propiedades de los logaritmos.

I. La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativo.

II. Los números negativos no tienen logaritmos

III. El logaritmo de la base es 1

IV. El logaritmo de 1 es cero

V. El logaritmo del producto de dos números positivos M y N es igual a la suma de los logaritmos de ambos, es decir,

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

VI. El logaritmo del cociente de dos números positivos M y N es igual a la diferencia de los logaritmos de ambos, es decir,

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

VII. El logaritmo de la potencia p de un número positivo M es igual al producto del exponente p por el logaritmo de la base, es decir,

$$\mathrm{Log}_b\, M^p = p \log_b M$$

Definición de antilogaritmo

El antilogaritmo de un logaritmo, es el número correspondiente a dicho logaritmo:

Ejemplo:

Log (572) =2.7574
Antilog (2.7574)= 572

Ejemplos

1. $\log_2 3(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

2. $\log_{10} \frac{17}{24} = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$

3. $\log_7 5^3 = 3 \log_7 5$

4. $\mathrm{Log}_{10} \sqrt[3]{2} = \log_{10} 2^{1/3} = \frac{1}{3} \log_{10} 2$

5. hallar e valor de (843/302) por logaritmo
Log (843/302) = log 843 – log 302
log 843 =
log 302 =
= 2.9258 – 2.4800
= 0.4458
Antilog (0.4458) = $\boxed{2.7912}$

6. hallar el valor de $(7.6)^6$ por el log
$\mathrm{Log}\,(7.5)^6 = 6 . \log 7.5$
$= 6\,(0.8750)$
$= 5.2503$
Antilog (5.2503) = $\boxed{177{,}978.52}$

7. calcular $\sqrt[5]{3}$ por log

Log $\sqrt[5]{3}$ = log 3/ 5 = 0.4771/5

=0.09542

Antilog (0.09542) = $\boxed{1.2457}$

8. calcular $\sqrt[3]{824/173}$ por log

Log $\sqrt[3]{824/173}$ = (log 824 – log 173) / 3

= (2.9159 – 2380) / 3 = 0.6779 / 3 = 0.2259

Antilog (0.2259) = $\boxed{1.6825}$

9. calcular en valor de $(3^{2/5})(5^{2/3})$ por log.

Log $(3^{2/5})(5^{2/3})$ = log $3^{2/5}$ + log $5^{2/3}$

= 2/5 log 3 + 2/3 log 5

= 2/5 (0.47712) + 2/3 (0.6989)

= 0.19084 + 0.4659

0.6567

Antilog (0.6567) = $\boxed{4.5367}$

10. calcular por log. N= √(6.3794)(0.95327)

= (Log 6.3794 + log 0.95327) / 2

= (0.8047 + (-0.02078)) /2

= 0.7839 / 2

= 0.3919

$\boxed{\text{Antilog (0.3919) = 2.4658}}$

11. calcular por log ((222.6) (0.8988)) / $(5.344)^2$

= Log 222.6 + log 0.8988 – 2 log 5.344

= 2.3455 + (- 0.0463) – 2(0.7278)

= 2.3475 – 0.0463 -1.4557

= 0.8455

$\boxed{\text{Antilog (0.8455) = 7.006}}$

12. calcular por log N= $((321.4)^{1/3}) / (208.7)^{1/2}$

Log N = 1/3 log 321.4 – ½ log 208.7

= 2.5070 / 3 – 2.3195 / 2

= 0.8356 – 1.1597

= -0.3241

$\boxed{\text{Antilog (-0.3241) = 0.474065}}$

Tarea:

Calcular por logaritmos hasta con 4 decimales:

1) $(3.141)(0.9856)(58.44)$

2) $((186000)(336)) / 3$

3) $\sqrt{}(1603 / 81.24)$

4) $\sqrt{}\ (476) / (181000)(0.436)^2$

5) $(624 / 7.21)^{1/5}$

6) $\sqrt{}(467)(38.3)$

7) $((65.31)^2 (1082)) / 1471$

8) $(3.2486)^{2/3} / (316.48)^{1/5}$

9) $(5.378)(92.86) / (774.1)(0.7863)$

10) $\text{Log } (0.0071756)(36.234)(2.6748)$

11) $\sqrt{}(6.3794)(0.95327)$

12) $(222.6)(0.8988)) / (5.344)^2$

13) $(321.4)^{1/3} / \sqrt{}(208.7)$

14) $N= ((0.2346)^2 (772.7)^{1/3}) / (12.45)^3 \sqrt{0.000382}$

15) $N= ((58.321)^3 (\sqrt{0.27846})) / (7.3416)^2 (0.08423)^{1/3}$

16) $P= ((78.41)^3\sqrt{142.3}) / (0.1562)^{1/4}$

11.4 Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en las cuales la incógnita aparece en el exponente y para encontrar su valor se requiere aplicar las propiedades de los logaritmos.

Ejemplos:

Despejar el valor de **x** de la siguiente expresión:

1.

$$\frac{e^{3x}+5}{\Pi}=1$$

$$e^{3x}=\Pi-5$$
$$\ln\left(e^{3x}\right)=\ln(\Pi-5)$$
$$(3x)\ln e=\ln(\Pi-5)$$
$$3x=\ln(\Pi-5)$$
$$x=\tfrac{1}{3}\ln(\Pi-5)$$

2.

$$6^{8x-1}=e^{6x}$$
$$\ln\left(6^{8x-1}\right)=\ln\left(e^{6x}\right)$$
$$(8x-1)\ln 6=6x\ln e$$
$$8x\ln 6-\ln 6=6x$$
$$8x\ln 6-6x=\ln 6$$
$$x(8\ln 6-6)=\ln 6$$
$$x=\frac{\ln 6}{(8\ln 6)-6}$$
$$x=0.215$$

3.

$$e^{8x-1}=\frac{5^{3x-2}}{e^{8x-1}}$$
$$\ln\left(e^{8x-1}\right)=\ln\left(\frac{5^{3x-2}}{e^{8x-1}}\right)$$
$$\to(8x-1)\ln e=\ln\left(5^{3x-2}\right)-\ln\left(e^{8x-1}\right)$$
$$\to 8x-1=(3x-2)\ln 5-(8x-1)\ln e$$
$$\to 8x-1=3x\ln 5-2\ln 5-8x+1$$
$$\to 8x+8x-1-1=3x\ln 5-2\ln 5$$
$$\to 16x-2=3x\ln 5-2\ln 5$$
$$\to 16x-3x\ln 5=2-2\ln 5$$
$$\to x(16-3\ln 5)=2(1-\ln 5)$$
$$\therefore x=\frac{2(1-\ln 5)}{16-3\ln 5}\Rightarrow x=-0.1091$$

Ejercicios extra clase

Recuerda consultar cualquier problema que surja a la hora de resolver tarea.

I. Encuentra el valor de **x** en cada una de las expresiones dadas:

1. $\frac{7^{3x+2}\cdot 6^{8x+1}}{3^{4x-1}}=2$

2. $\frac{e^{x^2-2}}{8^5}=1$

3. $x^x = e^{\frac{7x}{3}}$

4. $\frac{7^{3^{x^2+1}}}{9^8}=5$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Si las variables de las ecuaciones están como exponentes o logaritmos, las ecuaciones suelen llamarse ecuaciones exponenciales o logarítmicas respectivamente.
Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas se aplican las propiedades de los logaritmos a ambos miembros de la ecuación y se despeja la incógnita.

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $5^x = 20$

Log (5^x) = log 20

X * log 5 = log 20

X= log 20 / log 5

X = 1.3010 / 0.6989

X = 1.8614

2) Resolver la ecuación $5^{2x-1} = 125$

$\text{Log} (5^{2x-1}) = \log 125$

$(2x-1) * \log 5 = \log 125$

$2x-1 = \log 125 / \log 5$
$2x-1= 2.0969 / 0.6989 = 3.0002$

$2x=3+1$
$2x = 4$
$X = 4/2$
$X = 2$

3) esolver la ecuación $\log_{10} (5X-1) – \log_{10} (x-3) = 2$

$\log_{10} (5x-1 / x-3) = 2$
$10^2 = 5x-1 / x-3$
$100 = 5x-1 / x-3$
$100 (x-3) = 5x-1$
$100x – 300 = 5x – 1$
$100x – 5x = 300 – 1$
$95x = 299$

$X = 229 / 95$

4) Resolver $\log_6 (x+3) + \log_6 (x-2) = 1$

$\log_6 [(x+3)(x-2)]=1$
$6= (x+3)(x-2) = 6$

$X^2 + x -6 = 6$
$X^2 + x -6 -6 = 0$
$X^2 + x -12 = 6$
$(x+4)(x-3) = 0$
$x+4=0$
$x-3=0$

x

$X= - 4$

$X= 3$

5) Resolver log (x+6) – log (x-9) = log 4
$\text{Log}(x+6) / (x-9) = \log 4$ ($\log x = \log y \leftrightarrow x=y$)
$(x+6) / (x-9) = 4$
$x+6 = 4 * (x-9)$
$x+6 = 4x – 36$
$36+6 = 4x – x$
$42=3x$
$X= 42/3$

$X= 14$

Tarea

Encontrar el valor de la x:

1. $8^x = \frac{1}{2}$

2. $5^n = 20$

3. $\log_2 (x+1)^2 = 4$

4. $\log (3x+2) + \log 9 = \log (x+5)$

5. $\log_3 (2x-3) + \log_3 (x+6) = 3$

6. $\log_2 (x^2 + 3x + 2) - \log_2 (2x - 3) = \log_2 (2x+1)$

7. $(1.06)^x = 3$

8. $12^{2x+5} = 55(7^{3x})$

9. $\log (20x+1) - \log(x-2) = 2$

10. $2\log(x-4) = \log(x-1) + \log 4$

11. $\log (x-3) + \log(x+2) = 0$

12. $2 \log(x-3 = \log(x+5) + \log 4$

13. $\log (1000) (1+ x)^3$

14. $\log 3500 + (--x \log 1.25) = \log 500$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres jr. "Fundamentos de matemáticas superiores.", Primera Edición, Mc Graw Hill- Schaum, México, D.F. (1970).

Baldor Aurelio ."Algebra ", Primera Edición, Publicaciones cultural Editores, México (1988).

Conamat , "Matemáticas simplificadas",pearson-prentice-hall , México (2006)

Rees Sparks . "Algebra", Décimo Segunda Edición, Mc Graw Hill Interamericana, México (2005).

Spiegel, M. R. , "Algebra superior ". Serie Shaum", Editorial Mc Graw Hill, México (1999)

TRIGONOMETRÍA

Ingeniería Industrial.

Ingeniería Electromecánica.

Ingeniería Electrónica.

Ingeniería en Gestión Empresarial.

Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Ingeniería Mecatrónica.

Ingeniería Bioquímica.

Ingeniería en Materiales.

Ingeniería en Informática.

Ingeniería en Logística.

Ingeniería Aeronáutica.

Ingeniería Química.

Licenciatura en Biología.

Cuadernillo de Teoría y Problemas.

ELABORÓ: M.C.E JAVIER BAÑUELOS ORTEGA.

DIVISIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

A) PLANA O PLANIMETRÍA (RECTILINEA).- Estudia los ángulos en dos dimensiones.

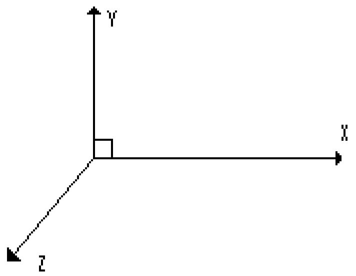
Toma como referencia los ejes X y Y.

Son figuras en el plano.

B) ESFÉRICA O ESTEREOMETRÍA.-

Estudia los ángulos en tres dimensiones.

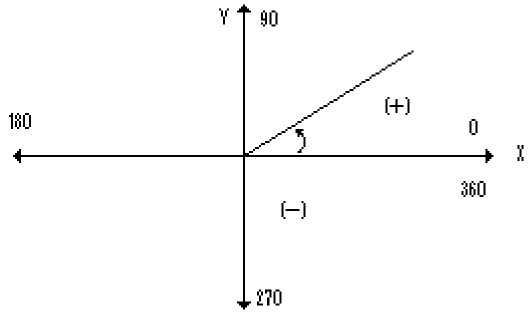
Son figuras en el espacio.



ÁNGULO.- Es la abertura comprendida entre la posición inicial y la posición final de una recta que ha girado alrededor de uno de sus puntos, permaneciendo siempre en el mismo plano.

ÁNGULO POSITIVO.- Aquel cuyo sentido es contrario al giro de las manecillas del reloj.

ÁNGULO NEGATIVO.- Aquel cuyo sentido es igual al giro de las manecillas del reloj.

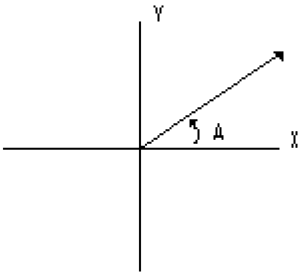


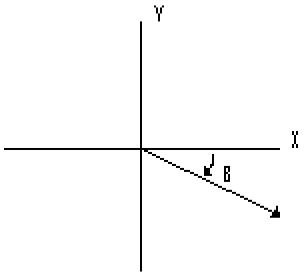
ÁNGULO SIMÉTRICO.- Son aquéllos que tienen el mismo valor absoluto.

Ejemplo:

Ángulo A = +40º Ángulo B = - 40º $|A| = |+40| = 40$

$|B| = |-40| = 40$





Ángulo A y B son simétricos.

SISTEMA DE UNIDADES ANGULARES

SISTEMA	SEXAGESIMAL	CICLICO	CENTESIMAL
Unidad	Grado sexagesimal (º)	Radian	Grado centesimal (º)
Definición	Es la nonagésima parte del ángulo	Es un arco cuya longitud es igual	El ángulo recto se divide en 100 partes, cada parte

	recto. 1º = 60’ 1’ = 60’’	al radio. 1 rad = 57.3º	se llama grado centesimal. 1º = 100’ 1’ = 100’’

Regla general de conversión

90 pi/2 rad = 100º

1) Sistema sexagesimal ↔ Sistema cíclico

90º = pi/2 rad → 180º = pi rad

2) Sistema Cíclico ↔ Sistema centesimal

Pi/2 rad = 100º → pi rad = 200º

3) Sistema sexagesimal ↔ Sistema centesimal

90º = 100º → 9º = 10º

Ejemplo:

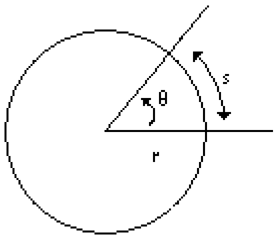
60º → rad

(Sexagesimal ↔ Cíclico)

$$\frac{60^{o}\ (\text{pi rad})}{180^{o}} = \frac{\text{pi rad}}{3}$$

60º = pi/3 rad

“Medida de un arco en función de su ángulo central correspondiente”



S = ɵ(r)

Donde:

S = arco correspondiente (m, cm, ft, km, etc.).

Ɵ = ángulo central girado (radianes).

r = radio de giro o de la circunferencia.

NOTA: con respecto al radian: el radian no tiene dimensiones físicas y por tanto se puede quitar o agregar según convenga.

Ejemplo:

S = ?	S = ɵ(r)
Ɵ = 2 rad	S = 2 rad (3 mt) = 6 rad (mt)
R = 3 mt	S = 6mt (se quita)

Ejemplo:

S = 10 ft	S = ɵ(r)
Ɵ = ?	$ɵ = \frac{S}{r}$
R = 5 ft	
	$Ɵ = \frac{10\ ft}{5ft} = 2$ rad (se agrega)

PROBLEMA #1.- Expresar en unidades cíclicas (radianes)

a) 36º sexagesimal → cíclico regla: 180º = pi (rad)

36º = $\underline{\text{pi (rad)}}$ = pi/5 rad

180º

b) 50º centesimal → cíclico regla: pi (rad)(200º)

50º = pi (rad) = pi/4 rad

200º

PROBLEMA #2.- Expresar en unidades sexagesimales

a) 3 pi rad cíclico → sexagesimal

3 pi rad (180º) = 540º

Pi (rad)

b) 5/4 pi rad 5/4 pi rad (180º) = 900/4 = 225º

pi (rad)

c) 2/5 pi rad 2/5 pi rad (180º) = 360/5 = 72º

pi (rad)

d) 30º 30º (pi rad) = 3/20 pi rad

200º

PROBLEMA #3.- Expresar en unidades centesimales

a) 36º

b) 70º

c) 5/2 pi rad

d)3/2 pi rad

a) 36 (10/9) = 40º

b) 70º (10/9) = 700/9

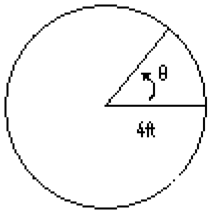
c) 5/2 pi rad (200º) =500º

pi/2 rad

d) 3/2 pi rad (900) = 300º

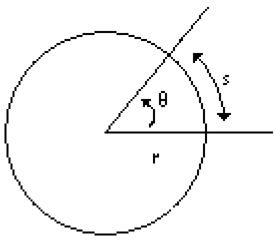
pi/2 rad

PROBLEMA #4.- Dado un círculo de radio 4 ft, determines la longitud de un arco (suspendido) por un ángulo central, cuya medida es 2/3 pi rad



DATOS:	FÓRMULA:	SUSTITUCIÓN:
r = 4 ft	s = ɵ (r)	s = 2/3 pi rad (4 ft)
s = ?		s = 8/3 pi ft
ɵ = 2/3 pi rad		

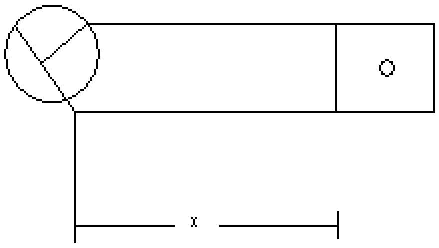
PROBLEMA #5.- Una vía de ferrocarril ha de describir un arco de circunferencia, ¿Qué radio hay que utilizar, sí la vía tiene que cambiar de dirección en 25º en un recorrido de de 120 mt?



DATOS:	FÓRMULA:	SUSTITUCIÓN:
Ɵ = 25	s = ɵ (r)	r= $\frac{120\ mt}{5/36\ pi\ rad}$ r = 804 mt/pi
r = ?	r = s/ɵ	
s = 120 mt		

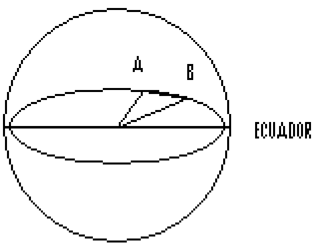
$25º \frac{(pi\ rad)}{180º} = \frac{25\ pi\ rad}{180º}$ r = 120 mt (36/5 pi rad) = 4320/5 pi rad

PROBLEMA #6.- Conforme el cilindro de la figura, rota o se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, la cuerda se enreda alrededor del cilindro. ¿Qué tan lejos se moverá la pesa en el extremo de la cuerda, cuando el cilindro se rota un ángulo de 53.8º? Considere que el radio del cilindro es de 4 ½ ft.



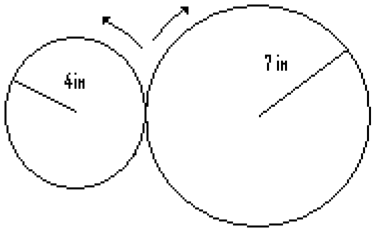
DATOS:	FÓRMULA:	CONVERSIÓN:	SUSTITUCIÓN:
Ɵ = 53.8	s = ɵ (r)	53.8 (pi rad) = 0.9389 pi rad	s = 0.9389 (4.5 ft)
r = 4.5 ft		180º	s = 4.212 ft
x = (arco) = s			

PROBLEMA #7.- El diámetro de la tierra es de aproximadamente 8000 millas, encuéntrese la distancia entre dos puntos sobre el ecuador cuya longitud difiera en 3.



DATOS:	FÓRMULA:	CONVERSIÓN:
Diámetro = 8000 millas	S = ɵ (r)	3º (pi rad) = 1/60 pi rad
Radio = 4000 millas		180º
Ɵ = 3		s = 1/60 pi rad (4000 millas)
S = ?		s = 4000/60 pi millas
		S = 200/3 pi millas

PROBLEMA #8.- Las dos ruedas mostradas en la figura hacen contacto de modo que la rotación de una rueda ocasiona que gire la otra. ¿Cuánto rota la rueda grande cuando la más pequeña gira un ángulo de 100º?



DATOS:	FÓRMULA:	CONVERSIÓN:
R = 4 in	$s = \theta (r)$	$s_1 = s_2$
$\Theta = 100$		$s_1 = \theta_1 r_1$ $s_2 = \theta_2 r_2$
S = ?		$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2$
		$\Theta_2 = \underline{\theta_1 r_1}$
	R2	

$S_1 = 100^\circ \frac{(\pi \text{ rad})}{180^\circ} = 5/9\ \pi$ rad

$S_1 = 5/9\ \pi$ rad (4 in) = $20/9\ \pi$ rad

$\Theta_2 = s_1/r_2$

$\Theta = \frac{20 \pi \text{ rad}}{9/7} = \frac{20 \pi \text{ rad}}{63} = 0.999$ rad

$\Theta = 56.72^\circ$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Expresar en grados sexagesimales.

a) 3/5 rad   b) 2435 rad c) 0.0234 rad

2.- Expresar en unidades cíclicas (radianes).

a) 33°26’ b) 36°17’49’’ c) 63°14’38’’

3.- Expresar en grados centesimales.

a) 36° b) 27°32’ c) 135°27’48’’

4.- Expresar en grados sexagesimales.

a) 56.45° b) 156.2472° c) 294.3428°

5.- Efectúe las operaciones siguientes:

a) 20°36’ + 41°22’ b) 26°28’ + 32°54’ + 6°28’

c) 36°12’ – 14°42’ d) 26°37’ – 20°48’

e) 180° - 124°35’ f) 180° - (62°18’ + 18°24’)

g) 180° - (36°47’ + 8°2’) h) 2(14°47’)

i) 180° - 2(30°45’)

AUTO EVALUACIÓN

1.- Expresar en grados sexagesimales

a) 60.2487° b) √3 rad de

2.- Expresar en unidades cíclicas (radianes)

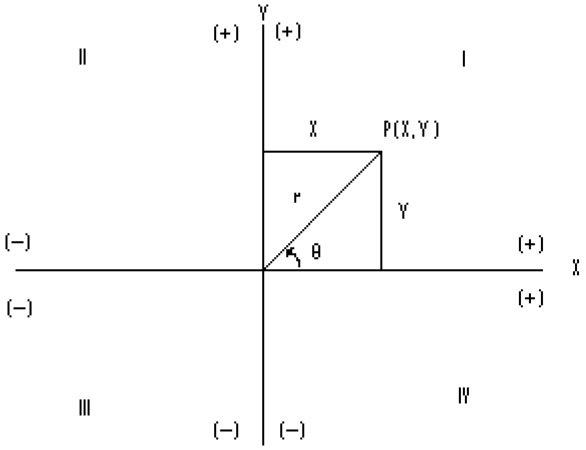
a) 235°48’52’’ b) 98.53°

3.- Encuentre la longitud de arco sobre un círculo de radio 5 cm que subtiende un ángulo central de:

a) 38° b) 95° c) 10°

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

a) Para un ángulo de cualquier magnitud



$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{Distancia}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{Distancia}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Tan} = \frac{\text{ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{Csc } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y}$$

R = distancia

R = x + y

X = abscisa

Y = ordenada

Funciones reciprocas.- Son aquellas que al multiplicarlas dan como producto la unidad; y se dice que la una es reciproca de la otra, es decir:

$$(\text{sen})\,(\text{csc}) = \frac{y\,(r)}{r\,(y)} = 1$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{\text{csc}\,\theta}\ ;\ \text{csc}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\ ;$$

Ejemplo:

Csc 20º = 1/sen 20º

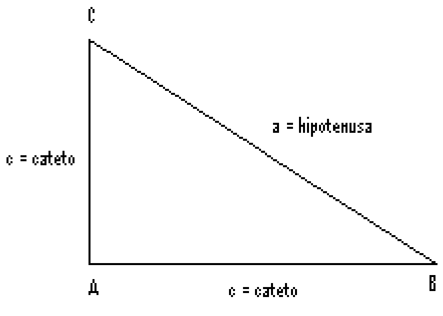
$$(\cos)(\sec) = \frac{x\,(r)}{r\ \ x} = 1$$

cos θ = 1/sec θ ; sec θ = 1/cos θ

$$\tan\theta = (\cot\theta) = \frac{y\,(x)}{x\ \ y} = 1$$

tan θ = 1/cot θ ; cot θ = 1/ tan θ

b) definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo



Sen B = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ = b/a sen C = c/a

Cos B = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$ = c/a cos C = b/a

Tan B = <u>cateto opuesto</u> = b/c tan C = c/b

Cateto adyacente

Cot B = cateto adyacente = c/b cot C = b/c

Cateto opuesto

Sec B = hipotenusa = a/c sec C = a/b

Cateto adyacente

Csc B = hipotenusa = b/c csc C = a/c

Cateto opuesto

Propiedad = son (complementarios)

Ángulo B + ángulo C = 90º

Ángulo C = ángulo B + 90º

Ángulo B = 90º - ángulo C

Las funciones de un ángulo agudo son iguales a las cofunciones del ángulo complementario.

	Sustituyendo: (IDENTIDADES)
Sen B = cos C	Sen B = cos (90º - B)
Cos C = sen B	Cos C = sen (90º - B)
Tan B = cot C	Tan B = cot (90º - B)
Cot B = tan C	Cot B = tan (90º - B)
Sec B = csc C	Sec B = csc (90º - B)
Csc B = sec C	Csc B = sec (90º - B)

Ejemplo:

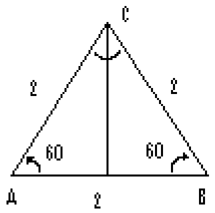
Sen 10º = cos (90º - 10º) = cos 80º

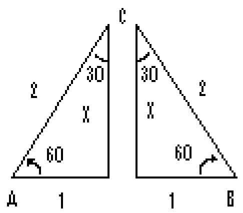
cos 30º = sen (90º - 30º) = sen 60º

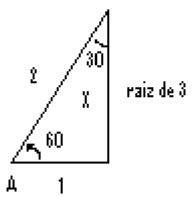
tan 75º = cot (90º - 75º) = cot 15º

CASOS PARTICULARES: (de triángulos rectángulos)

a) Se tiene un triángulo equilátero de lado 2 unidades







Por teorema de Pitágoras:

$(2)^2 = (x)^2 + (1)^2$

$4 = x^2 + 1$

$4 – 1= x^2$

$\sqrt{3} = x$

FUNCIONES DE 60º

Sen 60º = 3/2 = cos 30º

cos 60º = 1/2 = sen 30º

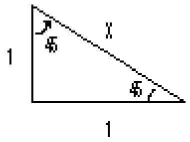
Tan 60º = 3/1 = 3 = cot 30º

Cot 60º = 1/√ 3 = √3/3 = tan 30º

Sec 60º = 2/1 = 2 = csc 30º

Csc 60º = 2/√ 3 = 2√3/3 = sec 30º

b) Se tiene un triángulo rectángulo isósceles con el valor de una unidad para los lados iguales.



Por teorema de Pitágoras:

$x^2 = (1)^2 + (1)^2$

$x^2 = 1 + 1$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

FUNCIONES DE 45º

Sen 45º = $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ = cos 45º

Tan 45º = $1/1 = 1$ = cot 45º

Sec 45º = $\sqrt{2}/1 = \sqrt{2}$ = csc 45º

Ejemplo #1.- efectuar utilizando los casos particulares

a) sen 30º + sen 45º = $½ + 1/\sqrt{2} = ½ + \sqrt{2}/2 = (1 + \sqrt{2})/2$

b) sec 45º - sen 45º = $\sqrt{2}/1 - \sqrt{2}/2 = (2\sqrt{2} - \sqrt{2})/2 = (1\sqrt{2})/2$

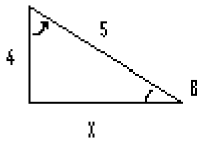
c) 2 sen 30º - cos 30º = $2(1/2) - \sqrt{3}/2 = 1\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2$

d) $\underline{(\tan 30^\circ)(\cot 30^\circ)} = \underline{(1/\sqrt{3})(\sqrt{3}/1)} = 1/1 = 1$

$(\tan 60^\circ)(\cot 60^\circ) = (\sqrt{3}/1)\ (1/\sqrt{3})$

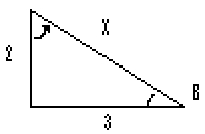
Ejemplo #2.- dada una función trigonométrica calcular el valor de las otras.

a) sen B = 4/5



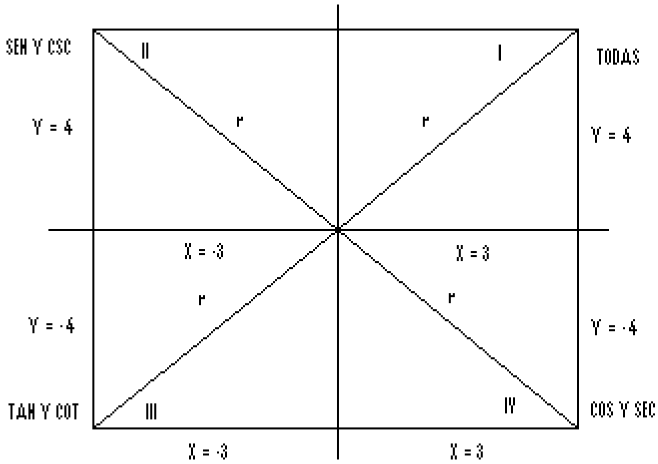
por teorema:	$\cos B = 3/5$
$(5)^2 = (4)^2 + (x)^2$	$\tan B = 4/3$
$25 = 16 + x^2$	$\cot B = 3/4$
$25 - 16 = x^2$	$\sec B = 5/3$
$9 = x^2$	$\csc B = 5/4$
$\sqrt{9} = x$	
$3 = x$	

b) tan B = 2/3



Por teorena:	sen B = 2/13
$(x)^2 = (2)^2 + (3)^2$	$\cos B = 3/13$
$x^2 = 4 + 9$	$\cot B = 3/2$
$x^2 = 13$	$\sec B = 13/3$
$x = \sqrt{13}$	$\csc B = 13/2$

c) Determinar los valores de las funciones trigonométricas de 0, si P es un punto de lado terminal de 0 y las coordenadas de P son:



a) P1 (3, 4)

b) P2 (-3, 4)

c) P3 (-3, -4)

d) Tan ө = -3/7

e) P4 (3, -4)

a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$r = \sqrt{9 + 16}$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

sen ө1 = y/r = 4/5 (+)

cos ө1 = x/r = 3/5 (+)

tan ө1 = y/r = 4/3 (+)

cot ө1 = x/y = 3/4 (+)

sec ө1 = r/x = 5/3 (+)

csc ө1 = r/y = 5/4 (+)

b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$r = \sqrt{9 + 16}$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

sen ө2 = y/r = 4/5 (+)

cos ө2 = x/r = -3/5 (-)

tan ө2 = y/r = 4/-3 (-)

cot ө2 = x/y = -3/4 (-)

sec ө2 = r/x = 5/-3 (-)

csc ө2 = r/y = 5/4 (+)

c) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$r = \sqrt{9 + 16}$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

sen ɵ3 = y/r = -4/5 (-)

cos ɵ3 = x/r = -3/5 (-)

tan ɵ3 = y/r = -4/-3 (+)

cot ɵ3 = x/y = -3/-4 (+)

sec ɵ3 = r/x = 5/-3 (-)

csc ɵ3 = r/y = 5/-4 (-)

d) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$

$r = \sqrt{9 + 16}$

$r = \sqrt{25}$

$r = 5$

sen ɵ4 = y/r = -4/5 (-)

cos ɵ4 = x/r = 3/5 (+)

tan ɵ4 = y/r = -4/3 (-)

cot ɵ4 = x/y = 3/-4 (-)

sec ɵ4 = r/x = 5/3 (+)

csc ɵ4 = r/y = 5/-4 (-)

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar el valor de las expresiones siguientes utilizando los casos particulares.

a) sen 45° - cos 62°   b) tan 30° + tan 45°

c) 2 (sen 30°)(cos 30°) d) (sen 45°)(sen 60°)

e) $\dfrac{(\sec 30°)(\tan 60°)}{(\cot 45°)(\tan 30)}$ f) $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60°(\tan 30°)D}$

2.- Dada la función calcular las demás.

a) sen A = 7/25 b) tan B = √17/2

c) cos B = 3/10   d) cot B = 5

e) sec B = √10   f) csc B = 14/5

3.- Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados:

a) b = 24; c = 25 b) a = 2; c = 2√5

c) a = 3; b = 2√10

AUTO EVALUACIÓN

1.- Encontrar el valor de la expresión

a) sen 30° (cos 60°) + cos 30° (sen 60°)

b) $\dfrac{\csc 30° + \csc 60° + \cos 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

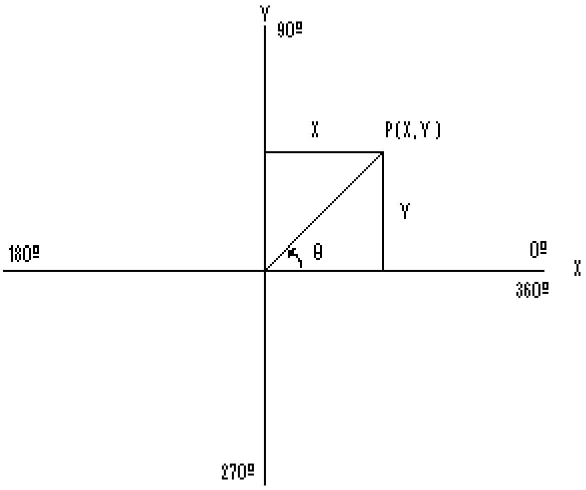
2.- Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados.

a) $a = \sqrt{3}$; $b = 1$ b) $b = \sqrt{7}$; $c = 4$ c) $a = 2$; $c = \sqrt{5}$

3.- Un hombre recorre 500m a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20° respecto a la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida?

4.- GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

d) Calcular el valor de las funciones trigonométricas para todos los semiejes, es decir para 0, 90, 180, 270 y 360.



0º	90º
Ɵ = 0º	Ɵ = 90º
Y = 0	Y = r
X = r	X = 0
Sen 0º = y/r = 0/r = 0	Sen 90º = y/r = r/r = 1
Cos 0º = x/r = r/r = 1	Cos 90º = x/r = 0/r = 0
Tan 0º = y/x = 0/x = 0	Tan 90º = y/x = y/0 = ∞ (indefinido)
Cot 0º = x/y = x/0 = ∞ (indefinido)	Cot 90º = x/y = 0/y = 0
Sec 0º = r/x = x/x = 1	Sec 90º = r/x = r/0 = ∞ (indefinido)
Csc 0º = r/y = r/0 = ∞ (indefinido)	Csc 90º = r/y = r/r = 1

180º	270º
Ɵ = 180º	Ɵ = 270º
Y = 0	-Y = r
-X = 0	X = 0
Sen 180º = y/r = 0/-x = 0	Sen 270º = y/r = -r/r = -1

Cos 180º = x/r = r/-x = -1

Tan 180º = y/x = 0/x = 0

Cot 180º = x/y = x/0 = ∞ (indefinido)

Sec 180º = r/x = -x/x = -1

Csc 180º = r/y = -x/0 = ∞ (indefinido)

Cos 270º = x/r = 0/-y = 0

Tan 270º = y/x = y/0 = ∞ (indefinido)

Cot 270º = x/y = 0/y = 0

Sec 270º = r/x = r/0 = ∞ (indefinido)

Csc 270º = r/y = r/-r = -1

360º

ϴ = 360º

-Y = 0

X = r

Sen 360º = y/r = 0/x = 0

Cos 360º = x/r = r/r = 1

Tan 360º = y/x = 0/r = 0

Cot 360º = x/y = r/0 = ∞ (indefinido)

Sec 360º = r/x = r/r = 1

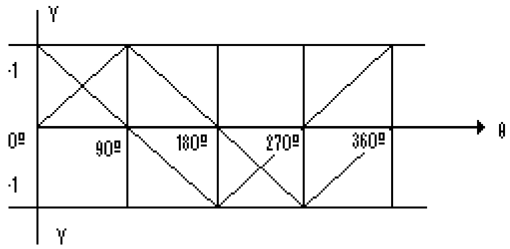
Csc 360º = r/y = x/0 = ∞ (indefinido)

ϴ	0º a 90º	90º a 180º	180º a 270º	270º a 360º
SENO	crese 0 a +1	Decrece +1 a 0	Decrece 0 a -1	crese -1 a 0
COSENO	Decrece +1 a 0	Decrece 0 a -1	crese -1 a 0	crese 0 a +1
TANGENTE	Crese 0 a +∞	Crece -∞ a 0	Crese 0 a +∞	Crece -∞ a 0
COTANGENTE	Decrece +∞ a 0	decrece 0 a -∞	Decrece +∞ a 0	decrece 0 a -∞

SECANTE	Crese 1 a +∞	Crece -∞ a -1	decrece -1 a -∞	Decrece +∞ a +1
COSECANTE	Decrece +∞ a +1	Crece +∞ a +1	Crece -∞ a -1	decrece -1 a -∞

Gráfica del seno y = sen ɵ (senoide)

Gráfica del coseno y = cos ɵ (cosenoide)



Periodo = 360º = 2π rad

Periodo = 360º = 2π rad

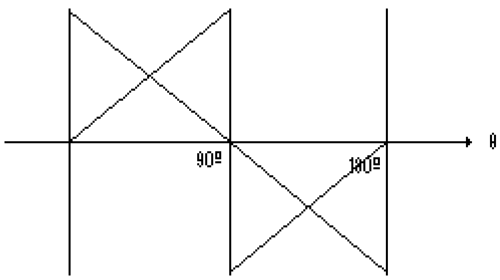
Asíntotas.- son las rectas de referencia que sirven para poder dibujar la gráfica.

Y = +1

Y = -1

Gráfica de la tangente

Gráfica de la cotangente

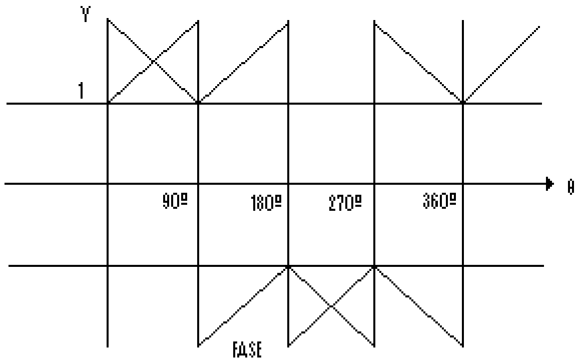


Período = 180º

Período = 180º

Gráfica de la secante

Gráfica de la cosecante



Y = sec ɵ

Período de la secante = 2π rad

Y = csc ɵ

Período de la csc = 2π rad = 360º

Desfasamiento.- Las mismas gráficas pero recorridas.

Fase.- Se repiten valores en los mismos puntos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar el valor de las expresiones siguientes utilizando los casos particulares.

a) sen 45° - cos 62° b) tan 30° + tan 45°

c) 2 (sen 30°)(cos 30°) d) (sen 45°)(sen 60°)

e) $\frac{(\sec 30°)(\tan 60°)}{(\cot 45°)(\tan 30)}$ f) $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60°(\tan 30°)D}$

2.- Dada la función calcular las demás.

a) sen A = 7/25 b) tan B = √17/2

c) cos B = 3/10 d) cot B = 5

e) sec B = √10 f) csc B = 14/5

3.- Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados:

a) $b = 24$; $c = 25$ b) $a = 2$; $c = 2\sqrt{5}$

c) $a = 3$; $b = 2\sqrt{10}$

AUTO EVALUACIÓN

1.- Encontrar el valor de la expresión

a) sen 30° (cos 60°) + cos 30° (sen 60°)

b) $\dfrac{\csc 30° + \csc 60° + \cos 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

2.- Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados.

a) $a = \sqrt{3}$; $b = 1$ b) $b = \sqrt{7}$; $c = 4$ c) $a = 2$; $c = \sqrt{5}$

3.- Un hombre recorre 500m a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20° respecto a la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida?

5.- IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

Ecuación.- Es una igualdad entre expresiones algebraicas o trigonométricas, Hay dos tipos de ecuaciones.

a) Ecuaciones condicionales o simplemente ecuaciones.- Son aquellas que se emplean para un solo valor o para un número determinado de valores de la variable incógnita.

b) Ecuaciones identidades o simplemente identidades.- Aquellos que se cumplen para un valor indeterminado o infinito de la variable incógnita.

Ejemplos:

1) $x + 3 = 0$

$X = -3$

$-3 + 3 = 0$

$0 = 0$

2) $x^2 + y^2 = (x + y)(x + y)$

$x = 1 \qquad x = 3$

$y = 2 \qquad y = 4$

3) sen $\theta = 1/\csc \theta$

$\Theta = 0^{o}, 1^{o}, 20^{o}$

Sen $30^{o} = 1/\csc 30^{o}$

Qué significa demostrar una identidad

Significa seguir un procedimiento lógico o matemático para demostrar la igualdad de valores de un miembro con respecto a otro, es decir, demostrar que la ecuación es cierta para una infinidad de valores de la variable incógnita.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES.

Reciprocas

$\text{Sen } \theta = 1/\csc \theta$

$\text{Cos } \theta = 1/\sec \theta$

$\text{Tan } \theta = 1/\cot \theta$

de cociente

$\tan \theta = \text{sen } \theta/\cos \theta$

$\cot \theta = \cos \theta/\text{sen}\theta$

Pitagóricas

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \\ \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \\ \\ \csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta \end{array}}$$

Ejemplos: demostrar

$\text{Sen } \theta = 1/\csc \theta$

$\text{Sen } \theta = 1/(r/y)$

$= y/r$

$= \text{sen } \theta$

$\tan \theta = \text{sen } \theta/\cos\theta$

$= (y/r)/(x/r)$

$= (y)(r)/(x)(r)$

$= y/x$

$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = (y/r)^2 + (x/r)^2$

$(y^2 + x^2)/r^2 = r^2/r^2 = 1 = 1$

Método o procedimiento para demostrar una identidad.-

1er paso.- escoger uno de los miembros para trabajar, eligiendo de preferencia el más complicado.

2do paso.- recordar bien las identidades fundamentales.

3er paso.- como caso particular, expresar todas las funciones trigonométricas en función de senos y cosenos.

4to paso.- estúdiese la posibilidad de factorizar una o varias de las expresiones.

Ejemplo #1.- demostrar $\csc \theta = \cot \theta/\cos \theta$

$= (\cos \theta/ \text{sen}\ \theta) / (\cos \theta/1)$ $= \cos \theta/ (\cos \theta)(\text{sen}\ \theta) = 1/ \text{sen}\ \theta$

$\text{Csc}\ \theta = \csc \theta$

Ejemplo #2.- $\text{sen}\ \theta\ (1 + \cot \theta) = \text{sen}\ \theta + \cos \theta$

$\text{Sen}\ \theta = 1 + (\cos \theta/\text{sen}\ \theta)$ $\boxed{\text{sen}\ \theta + \cos \theta = \text{sen}\ \theta + \cos \theta}$

$\text{Sen}\ \theta = (\text{sen}\ \theta + \cos \theta)/\text{sen}\ \theta$

Ejemplo #3.- $(\text{sen}^2\,\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 = 1 - 2\cos^2\theta$

$(\text{sen}^2\,\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 =$

$(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta)\,(\text{sen}^2\,\theta - \cos^2\theta) =$

$1 \qquad \text{sen}^2\,\theta - \cos^2\theta =$

$(1 - \cos\theta) - \cos^2\theta =$

$1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta =$

$\boxed{1 - 2\cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta}$

(q.e.d.)

Ejemplo #4.- $1 - \tan^2\theta = 2 - \sec^2\theta$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$1 - (\sec^2\theta - 1) =$

$+1 - \sec^2\theta + 1 =$

$\boxed{2\sec^2\theta = 2 - \sec^2\theta}$

(q.e.d.)

$1 - \tan^2\theta = 2 - \sec^2\theta$

$= 2 - (1 + \tan^2\theta)$

$= 2 - 1 - \tan^2\theta$

$\boxed{1 - \tan^2\theta = 1 - \tan^2\theta}$

(q.e.d.)

Ejemplo #5.- $(\sec^2\theta)(\csc^2\theta) = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

$\sec^2\theta = 1/\cos^2\theta$

$\csc^2\theta = 1/\text{sen}^2\,\theta$

$= 1/\cos^2\theta + 1/\text{sen}^2\,\theta$

$$= \frac{\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta}{(\cos^2\theta)\,(\text{sen}^2\,\theta)}$$

$$= (1/\cos^2 \theta)\ (1/\text{sen}^2 \theta)$$

$$\boxed{(\sec^2 \theta)\ (\csc^2 \theta) = (\sec^2 \theta)(\csc^2 \theta)}$$

(q.e.d.)

Ejemplo #6.- $1 – (\cos^2 \theta/1 + \text{sen}\ \theta) = \text{sen}\ \theta$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ \theta) - \cos^2 \theta}{(1 + \text{sen}\ \theta)} =$$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ \theta) – (1 + \text{sen}^2 \theta)}{(1 + \text{sen}\ \theta)} =$$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ \theta) – (1 + \text{sen}\ \theta)(1 – \text{sen}\ \theta)}{(1 + \text{sen}\ \theta)} =$$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ \theta)\ 1 - (1 - \text{sen}\ \theta)}{(1 + \text{sen}\ \theta)} =$$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ \theta)\ (1 - 1 + \text{sen}\ \theta)}{(1 + \text{sen}\ \theta)} = \qquad \boxed{\text{Sen}\ \theta = \text{sen}\ \theta}$$

Ejemplo #7.- Demostrar que:

$$1/(1 – \text{sen}\ A) + 1/(1+ \text{sen}\ A) = 2 \sec^2 A$$

$$\frac{(1 + \text{sen}\ A) + (1 – \text{sen}\ A)}{(1 - \text{sen}\ A) + (1 + \text{sen}\ A)} =$$

$$\frac{(1 + \operatorname{sen} A) + (1 - \operatorname{sen} A)}{(1 - \operatorname{sen} A) + (1 + \operatorname{sen} A)} =$$

$2/(1 - \operatorname{sen}^2 A) =$

$2/\cos^2 A =$

$2(1/\cos^2 A) = 2 \sec^2 A = 2 \sec^2 A$

q.e.d.

Ejemplo #8.- Demostrar que:

$$\frac{\tan^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{\cot^2 \theta - \cos^2 \theta} = \tan6\, \theta$$

$$\frac{(\operatorname{sen}^2 \theta/\cos^2 \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta}{(\cos^2 \theta/\operatorname{sen}^2 \theta) - \cos^2 \theta} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta\ (1 - \cos^2 \theta)/\cos \theta}{\cos^2 \theta\ (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)/\operatorname{sen} \theta} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen}^2 \theta)(\operatorname{sen}^2 \theta)\ (\operatorname{sen}^2 \theta)}{(\cos^2 \theta)\ (\cos^2 \theta)\ (\cos^2 \theta)} =$$

$$\frac{(\operatorname{sen}^2 \theta - (\operatorname{sen}^2 \theta)(\cos^2 \theta))/\cos^2 \theta}{(\cos^2 \theta - (\cos^2 \theta)(\operatorname{sen}^2 \theta))/\operatorname{sen}^2 \theta} =$$

$\underline{sen^2\ \theta\ (sen^2\ \theta)/cos^2\ \theta} =$

$cos\ \theta\ (cos\ \theta)/sen\ \theta$

$sen6\ \theta/cos6\ \theta = tan6\ \theta$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Demuestra las siguientes identidades:

1.- $(1 - sen^2 A)(1 + tan^2 A) = 1$

2.- $\frac{sen\ \theta}{Csc\ \theta} + \frac{cos\ \theta}{sec\ \theta} = 1$

3.- $\frac{1 - 2cos^2 A}{Sen\ A\ csc\ A} = tan\ A - csc\ A$

4.- $\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x} = \frac{sec\ x - 1}{sec\ x + 1}$

5.- $\frac{sen^3 x + cos^3 x}{Sen\ x + cos\ x} = 1 - sen\ x\ (cos\ x)$

6.- $(tan\ a - cot\ a)^2 = sec^2 a + csc^2 a - 4$

7.- $1 - (tan^2 x)^2 = 2(sec^2 x - (sec^2 x)^2)$

8.- $\frac{cos\ x\ cot\ x}{Cot\ x - cos\ x} = \frac{cotx + cos\ x}{cos\ x\ cot\ x}$

9.- $(1 + tan\ x)^2 = sec^2 x\ (1 + 2cos\ x\ sen\ x)$

10.- $\frac{1 - sen\ x}{1 + sen\ x} = \frac{(cos\ x)^2}{(1 + sen\ x)^2}$

AUTO EVALUACIÓN

Demostrar las siguientes identidades:

1.- $(\sec^2 x)^2 + (\tan^2 x)^2 = 1 + 2 \operatorname{scs}^2 x \tan^2 x$

2.- $\dfrac{\operatorname{sen} x + 1}{1 + \cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x$

3.- $\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$

4.- $(1 + \operatorname{sen} u + \cos u)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} u)(1 + \cos u)$

5.- $\dfrac{1 + (\cos^3 t)^2}{\operatorname{sen}^2 t} = 1 \cos^2 t + (\cos^2 t)^2$

6.- ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

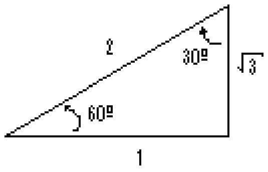
Resolver una ecuación trigonométrica significa hallar los valores de la variable que la satisfacen.

Tales valores de la variable se llaman soluciones o raíces.

El conjunto solución es el conjunto de todos los valores de la variable que son soluciones de acuerdo con un intervalo o campo de variación previamente dado. Solo se encontrarán aquellas raíces que estén dentro del intervalo fundamental, previamente dado.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN.- El método para resolver una ecuación trigonométrica es el mismo que para resolver una ecuación algebraica.

Ejemplo #1.- Resolver la ecuación



$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0 \qquad (0º \leq \theta \leq 90º)$

$2 \text{ sen } \theta = 1$ $\quad$ $2x - 1 = 0$

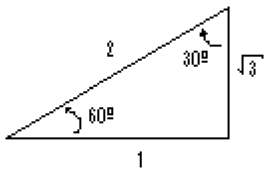
$\text{Sen } \theta = 1/2$

$\text{Sen } 30^\circ = ½$

$\Theta = \text{inv sen } ½ = 30^\circ$

Ejemplo #2.-

$4 \cos^2 \theta - 3 = 0$ $\quad$ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$



$4 \cos^2 \theta = 3$

$\sqrt{\cos^2 \theta} = \sqrt{3}/\sqrt{4}$

$\text{Cos } \theta = \sqrt{3}/\sqrt{4}$

$\text{Cos } \theta = \sqrt{3}/2 = \theta = \text{inv cos } \sqrt{3}/2 = 30^\circ$

Ejemplo #4.- Resolver la ecuación.

$4 \text{ sen3 } \theta - \text{sen } \theta = 0^\circ$ $\quad$ $(0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$

$4xx^2 - x = 0$

$\text{Sen } \theta \,(4 \text{ sen}^2 \theta - 1) = 0$ $\quad$ $x(4x^2 - 1) = 0$

Sen $\theta = 0$

$\Theta 1 = \text{inv sen } (0) = 0^{\circ}, 180^{\circ}$

$4 \text{ sen}^2 \theta - 1 = 0$

$4 \text{ sen}^2 \theta = 1$

$\sqrt{\text{sen}^2 \theta} = \sqrt{1}/\sqrt{4}$

Sen $\theta = \frac{1}{2}$

$\Theta = \text{inv sen } (1/2) = 30^{\circ}$

$\Theta = (0^{\circ}, 30^{\circ}, 150^{\circ}, 180^{\circ})$

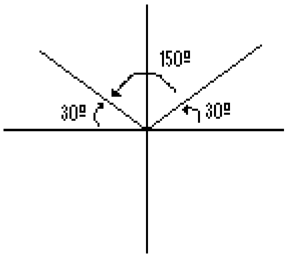
$x1 = 0$

$4x^2 - 1 = 0$

$4x^2 = 1$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}/\sqrt{4}$

$x2 = 1/2$



Ejemplo #5.-

$\text{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} = \cos^2 \theta$ $(0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ})$

$(\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$

$\text{sen}^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta)$

$1 - \cos^2 \theta + \frac{1}{2} = \cos^2 \theta$

$1 + \frac{1}{2} = \cos^2 \theta + \cos^2 \theta$

$3/2 = 2 \cos^2 \theta$

$\sqrt{3}/\sqrt{4} = \sqrt{\cos^2 \theta}$

$\sqrt{3}/2 = \cos \theta$

$\Theta = \text{inv} \cos(\sqrt{3}/2) = 30º$

Ejemplo #6.- $3 \tan^2 \theta + 4 \tan \theta – 1 = 0$ $(0º \leq x \leq 360º)$

$X = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b – 4ac)}}{2^a}$

a = 3

b = 4

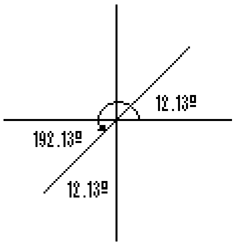
C = -1

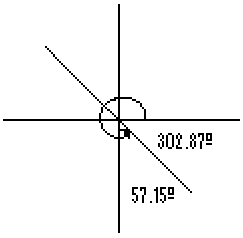
$\tan \theta = \dfrac{-4 \pm \sqrt{(4) – (3)(-1)}}{2(3)} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{(16 + 12)}}{6}$

$\tan \theta = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \dfrac{-4 \pm 5.29}{6}$

$\tan \theta 1 = \dfrac{-4 + 5.29}{6} = \dfrac{1.29}{6} = 0.215$

$\tan \theta 2 = \dfrac{-4 - 5.29}{6} = \dfrac{-9.29}{6} = 1.548$





$\Theta 1$ = inv tan (0.215) = 12.13º

$\Theta 1$ = inv tan (-1.548) = -57.13º θ = (12.13, 122.87, 192.13)

Ejemplo #7.- 2 sen x + csc x = 3

Csc x = 1/sen x

(2 sen x + 1/sen x = 3) sen x

2 sen x^2 + 1 = 3 sen x

2 sen x^2 - 3 sen x + 1 = 0

P = 2 (-2, -1)

S = -3

2 sen^2 x – 2 sen x – sen x + 1 = 0

2 sen x(sen x -1) – (sen x - 1)

(sen x - 1) (2 sen x - 1) = 0

sen x – 1 = 0 2 sen x – 1 = 0

Sen x = 1 2 sen x = 1

x = inv sen 1 sen x = 1/2

x1 = 90º x = inv sen 1/2

X2 = 30º

X = (30º, 90º, 150º)

EJEMPLOS DE ECUACIONES

Ejemplo #2.-

2 sen x + csc x = 3 (0 – x - 360)

2 sen x + 1/sen x = 3 sen x

2 sen x + 1 = 3 sen x

2 sen x – 3 sen x + 1 = 0

Factorizando:

2 sen x – 2 sen x – sen x + 1 = 0

2 sen x (sen x - 1) – (sen x - 1) = 0

2 sen x (sen x - 1) = 0

Sen x – 1 = 0	2 sen x – 1 = 0
Sen x = 1	2 sen x = 1
X = inv sen 1	sen x = 1/2
X = 90º	x = inv sen ½ = 30

X = 30, 90, 150

Ejemplo #3.-

2 tan x sen x – tan x = 0

Tan x (2 sen x - 1) = 0

Tan x = 0

X = inv tan (0)

X = 0, 360

X = 0, 30, 150, 360

2 sen x – 1

2 sen x = 1

sen x = 1/2

X = inv sen 1/2

x = 30, 150

Ejemplo #4.-

<u>Sen 0 + cos 0</u> = 1- sen 0 cos 0

Sen 0 + cos 0

A + b = (a + b) (a – ab + b)

<u>(sen 0 + cos 0) (sen 0 – sen 0 cos 0 + cos 0)</u>

(sen 0 + cos 0)

(Sen 0 + cos 0) – sen 0 cos 0 =

1 – sen 0 cos 0 = 1 – sen 0 cos 0

Sen 2x + sen x = 0

Sen (a +b) = sen a cos b + sen b cos a

A = b

Sen (a + a) = sen a cos a + sen a cos a

Sen 2a = (2) sen a cos a

2 sen x cos x + sen x = 0

Sen x (2 cos x + 1) = 0

Sen x = 0	2 cos x + 1 = 0
X = inv sen (0)	2 cos x = -1
X = 0	cos x = -1/2
	X = inv cos -1/2
	X = 60º

Cos (a + b) = cos a cos b – sen a sen b

A = b

Cos (a + b) = cos a cos a – sen a sen a

Cos 2ª = cos a – sen a

Sen a + cos a = 1

Sen a = 1 – cos a

Cos a = 1 – sen a

Cos a = (1 – sen a) – sen a

Cos a = 1 – 2 sen a

Cos a = cos a – (1 – cos a)

= cos a – 1 + cos a

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- (tan x – 1) (2sen x + 1) = 0 , (0° ≤ x ≤ 360°)

Solución: x = { 45°, 210°, 225°, 330°}

2.- sen^2 a = $3cos^2$ a , (0° ≤ a ≤ 90°)

Solución: a = 60°

3.- sec x = √2 tan x , (0° ≤ x ≤ 90°)

Solución: x = 45°

4.- 3 cos^2 x – 5 sen x + ¼ = 0 , (0° ≤ x ≤ 90°)

Solución: x1 = 30°, x2 = inadmisible

5.- tan a = cos a , (0° ≤ a ≤ 90°)

Solución: a1 = 38°10’, a2 = inadmisible

6.- $4sen^2$ a – 8sen a + 3 = 0 , (0° ≤ a ≤ 90°)

Solución: a1 = 30°, a2 = inadmisible

7.- tan^2 a – (1 + √3) tan a + √3 = 0 , (0° ≤ a ≤ 90°)

Solución: a1 = 60°, a2 = 45°

8.- sec x – 1 = tan x , (0° ≤ x ≤ 360°)

Solución: $x = 0°$

9.- $\operatorname{sen} x + 5\cos x + 5 = 0$, $(0° \leq x \leq 360°)$

Solución: $x = \{180°, 241°56'\}$

10.- $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos x$, $(0° \leq x \leq 360°)$

Solución: $x = \{36°52', 270°\}$

AUTO EVALUACIÓN

Resolver las siguientes ecuaciones

1.- $2\cos^2 a + 3\cos a + 1 = 0$ para $(0° \leq a \leq 360°)$

2.- $2\cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ para $(0° \leq x \leq 360°)$

3.- $2 \tan a \sec a - \tan a = 0$ para $(0° \leq a \leq 360°)$

4.- $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 0$ para $(0° \leq x \leq 360°)$

5.- $2\cos u - \operatorname{sen} u = 1$ para $(0° \leq u \leq 360°)$

7.- SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo está compuesto básicamente de seis partes de tres lados y de tres ángulos.

Resolver un triángulo significa que debemos encontrar los valores de estas seis partes, es decir, se pueden determinar completamente esas seis partes si se conocen dos de ellas y por lo menos una de las cuales debe ser un lado.

Pueden presentarse cuatro casos distintos según los elementos conocidos sean:

1er caso: dados la hipotenusa y un ángulo agudo.

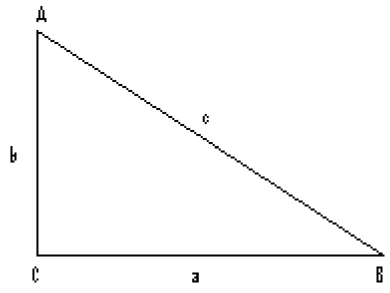
2do caso: dados un cateto y un ángulo agudo.

3er caso: dados la hipotenusa y un cateto

4to caso: dados los dos catetos.

El procedimiento para resolver un triángulo rectángulo es trazar el triángulo a escala, encerrar con un círculo pequeño y los elementos dados, escribir las expresiones trigonométricas o funciones que relacionan 2 de los elementos conocidos y despejar la incógnita.

Ejemplo #1.- Dados la hipotenusa y un ángulo agudo.



Datos: la suma de los ángulos internos

Ángulo C = 90º de un triángulo = 180º

c = 7.25 A + B + C = 180º

Ángulo A = 35º 35º + x + 90º = 180º

Incógnitas:

a = ?

b = ?

Ángulo B = ?

$180º - 90º - 35º = x$

<u>ángulo B = 55º</u>

Sen B = b/c

Sen 55º = b/7.55

b = sen 55º (7.25)

b = (0.8191)(7.25)

<u>b = 5.9</u>

$c^2 = a^2 + b^2$

$(7.25)^2 = a^2 + (5.9)^2$

$5.25 – 34.8 = a^2$

$17.7 = a^2$

$a = \sqrt{17.7}$

<u>a = 4.2</u>

Ejemplo #2.- Dados un cateto y un ángulo agudo. Resuelva el triángulo rectángulo en C, si uno de los catetos vale 6 ft y el ángulo A = 27º

Datos:

Ángulo C = 90º

a = 6 ft

Ángulo A = 27º

∑ ángulo int A = 180º

A + B + C = 180º

B = 180º - A – B

B = 180º - 27º - 90º

Ángulo B = 63º

incógnitas:

Ángulo B = ?

c = ?

b = ?

sen A = a/c

c = a/sen A

c = 6 ft/sen 27º

c = 13.21 ft

teorema de Pitágoras:

$c^2 = a^2 + b^2$

$(13.21)^2 = (6)^2 + b^2$

$b = \sqrt{(13.21)^2 - (6)^2}$

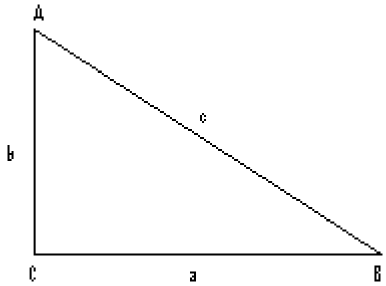
$B = \sqrt{74.66 - 36}$

$b = \sqrt{138.66}$

b = 11.77

Ejemplo # 3.- Dados la hipotenusa y un cateto. Resuelva el triángulo rectángulo ACB cuyo ángulo recto es C.

Si b = 27cm, c = 32cm



Datos:	teorema de Pitágoras	para ángulo A
c = 32cm	$c^2 = a^2 + b^2$	cos b = a/c
b = 27cm	$a^2 = c^2 - b^2$	cos B = 17.1/32cm
Ángulo C = 90º	$a^2 = (32cm)^2\ (27cm)^2$	cos B = 0.5343
Ángulo A = ?		B = inv cos 0.5343
Ángulo B = ?		B = 57º42’
a = ?		ángulo A + ángulo B = 90º
		90º - 57º 42’ = ángulo A
		Ángulo A = 33º

En un ángulo recto los ángulos no rectos

Son complementarios.

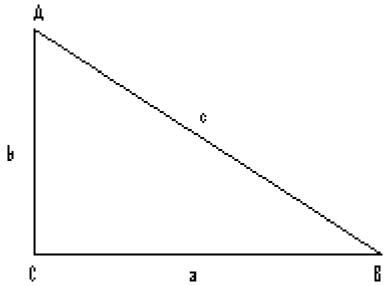
Ejemplo #4.- Dados los catetos. Resuelva los triángulos rectángulos ACB dados: a = 62 in b = 36 in

Incógnitas:

Ángulo A = ?

Ángulo B = ?

c = ?



Sen A = a/c

Sen A = 62 in/71.6 in

Sen A = 0.86

A = inv sen 0.86

A = 59.85

teorema de Pitágoras

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (62\text{ in})^2 + (36\text{ in})^2$

$c^2 = 5140\text{ in}^2$

$c = \sqrt{5140\text{ in}^2}$

C = 71.6 in

∑ángulos internos del A = 180º

Ángulo A + ángulo B + ángulo C = 180º

59.85º + B + 90º = 180º

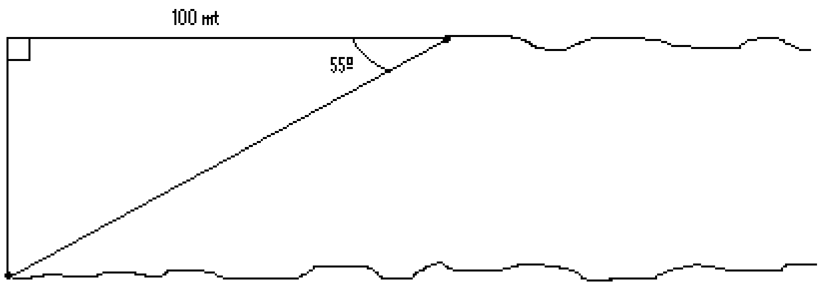
B = 180º - 59.85º = 90º

B =30.15º

APLICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Aplicación 1

Un ingeniero que desea saber la anchura de un rio camina 100 mt corriendo hacia abajo desde un punto situado directamente frente a un árbol sobre la orilla opuesta del ángulo de la orilla del río y la línea de observación hacia el árbol es de 55º ¿Cuál es la anchura del rio?



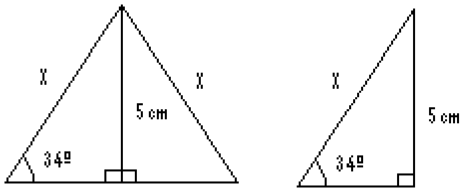
Tan 55º = x/100 m

X = tan 55º (100 m)

X = (1.42) 100 cm

<u>X = 142 cm</u>

El ángulo en la base de un triángulo isósceles es de 34º y la altura mide 5cm. Calcúlese la longitud de cada uno de los lados iguales.



Sen 34º = 5 cm/x

X = 5 cm/sen 34º

X = 5 cm/0.559

X = 8.94

Calcular el lado de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 3 cm de radio.

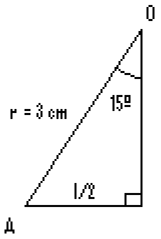
Central A ó B = 360º/n = 30º

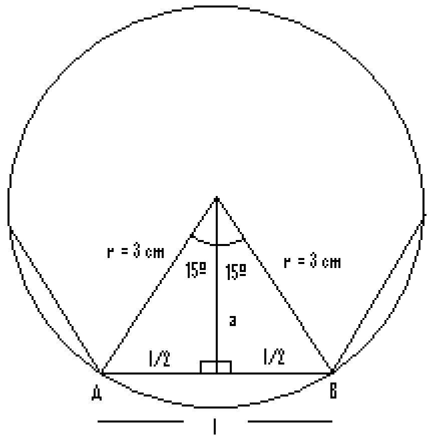
Dados:

n = 12 lados

r = 3 cm

l= ?





Sen 15º = (l/2)/3 cm

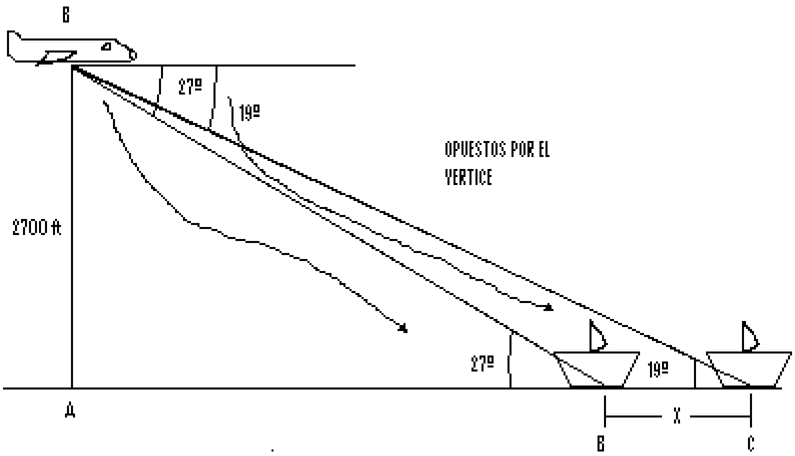
l/2 = 3 cm (sen 15º)

l = 2 (3 cm) (sen 15º)

l = 6 cm (0.2588)

<u>l = 1.55 cm</u>

Un avión que vuela a 2700 ft sobre el nivel del mar, los ángulos de represión de dos barcos son 27 y 19 hacia el oeste, encuéntrese la distancia entre los dos barcos.



AC = AB + BC

AC = AB + X

∆ ABD, tan 27º = 2700 ft/AB → AB = 2700/tan 27º = 2700 ft/0.5095

<u>AB = 5299.3 ft</u>

∆ ACD, tan 19º = 2700 ft/AC → AC = 2700/ tan 19º = 2700 ft/0.3443

<u>AC = 7841.9 ft</u>

1 7841.9 ft = 5299.3 ft + X
7841.9 ft – 5299.3 ft = X

<u>X = 2542.69 ft</u>

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada uno de los siguientes triángulos ABC, rectángulos en C, dados:

1.- ángulo A = 35°20' , c = 112

Solución: ángulo B = 54°40' , a = 64.8 , b = 91.4

2.- ángulo B = 48°40' , c = 225

Solución: ángulo A = 41°20' , a = 149 , b = 169

3.- ángulo A = 58°40' , b = 38.6

Solución: ángulo B = 31°20' , a = 63.4 , c = 74.2

4.- ángulo B = 49°14' , b = 222.2

Solución: ángulo A = 40°46' , a = 191.6 , c = 293.4

5.- a = 25.4 , b = 38.2

Solución: ángulo A = 33°37' , ángulo B = 56°23' , c = 45.9

6.- b = 672.9 , c = 888.1

Solución: ángulo A = 40°44' , ángulo B = 49°16' , a = 579.4

7.- Desde la parte superior de una torre de 120 m de altura, se observa que el ángulo de depresión de un objeto que está a nivel con la base de la torre es de 27°43’. ¿Cuáles son las distancias del objeto a la punta y a la base de la torre?

Solución: 258 m , 228 m

8.- Un observador halla que el ángulo de elevación de la cima de una torre, vista desde cierto punto A, es de 28°; adelanta 30 m hacia la torre y entonces el ángulo de elevación D es de 47°. ¿Cuántos metros le faltan para llegar al pie de la torre?

Solución: 29.52 m

9.- Desde la cima de una colina C, se ven dos mojoneras A y B distantes de un km, y los ángulos de depresión son respectivamente, 8° y 16°. ¿Qué altura tiene la colina?(se suponen las mojoneras en plano horizontal y en un mismo plano vertical con la cima).

Solución: 275.63 m

AUTO EVALUACIÓN

1.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos en C, dados:

a) ángulo A = 35°10’ , c = 72.5 cm

b) ángulo B = 54°12’ , c = 182.5 ft

c) a = 24.36 m , ángulo A = 58°53’

d) a = 43.9 in , b = 24.3 in

e) b = 15.25 mm , c = 32.68 mm

2.- Una estatua DC está colocada sobre una columna BD de 40 m de alto, a una distancia AB de 25 m del pie de la columna, la estatua se ve bajo un ángulo de 5°, ¿Cuál es la altura de la estatua?

3.- La longitud del lado de un octágono regular es de 12 cm. Hallar los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a él.

8.- TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cualquier triángulo que no tenga uno de sus ángulos interiores igual a 90º o sea un ángulo recto se llama oblicuángulo.

Para resolver estos triángulos necesitamos conocer tres elementos uno de los cuales debe ser por lo menos un lado, presentándose cuatro casos distintos:

1er caso.- Dados dos ángulos y un lado (ALA ó AAL)

2do caso.- Dados dos lados y un ángulo comprendido (LAL)

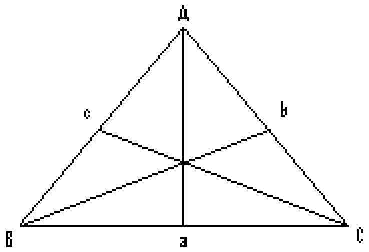
3er caso.- Dados los tres lados (LLL)

4to caso.- Caso ambiguo – Dados los dos casos y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

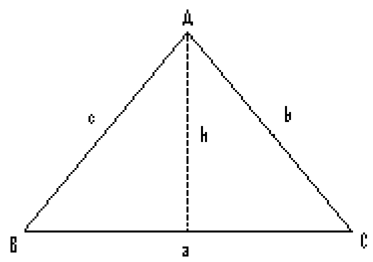
La idea es desarrollar técnicas para resolver estos triángulos en cada uno de los casos anteriores y para lograr esto usaremos dos teoremas fundamentales, la ley de los senos y la ley de los cosenos.

Enunciado y demostración de la ley de los senos.-

“En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”



a/sen A = b/sen B = c/sen C



Sen B = h/c → h = c sen B

Sen C = h/b → h = b sen C

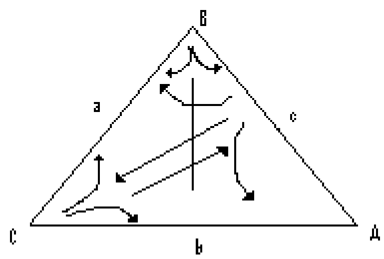
Igualamos:

C sen B = b sen C

c/sen C = b/sen B

ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LOS COSENOS.-

“En todo triángulo un lado cualquiera al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menores al doble producto de estos por el coseno del ángulo entre ellos, o el ángulo directamente opuesto al lado inicial”



a = b + c – 2bc cos A
b = a + c – 2ac cos B
c = a + b – 2ab cos C

Δ ADB rectángulo

Cos A = x/c $\underline{x = c \cos A} \rightarrow 1$

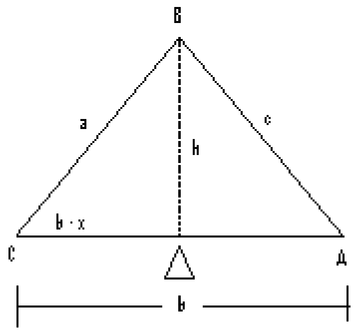
Δ rect. ADB, $\underline{c^2 = x^2 + h^2} \rightarrow 2$

Δ rect. CDB, $a^2 = (b - x)^2 + h^2$

$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2$

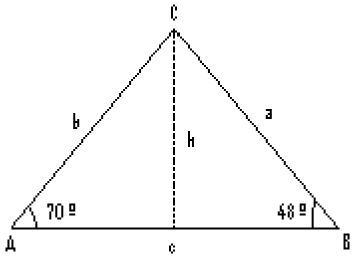
$a^2 = b^2 - 2b\,(C\ COS\ A) + (x^2 + h^2)$

$a^2 = b^2 - 2bc \cos A + c^2$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Ejemplo #1.- Dar los dos ángulos y un lado. Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo.



Datos:	incógnitas:
A = 70º	C = 62
c = 10 cm	a = ?
B = 48º	b = ?
	Área = ?
	Perímetro = ?

$10 \text{ cm} / \text{sen } 62º = a / \text{sen } 70º \rightarrow a = \dfrac{10 \text{ cm sen } 70º}{\text{Sen } 62º} = \dfrac{10 \text{ cm } (0.9396)}{0.8829}$

<u>a = 10.64 cm</u>

$10 \text{ cm} / \text{sen } 62º = b / \text{sen } 48º \rightarrow b = \dfrac{10 \text{ cm sen } 48º}{\text{Sen } 62º} = \dfrac{10 \text{ cm } (0.7331)}{0.8829}$

<u>b = 8.41 cm</u>

$\text{sen } 48º = h/10.64 \text{ cm} \rightarrow h = (10.64)\ (0.7431)$

<u>h = 7.9 cm</u>

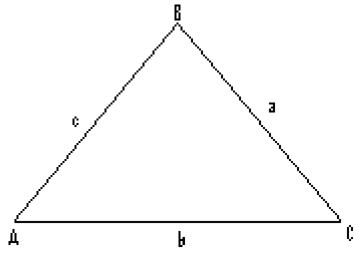
$A = \dfrac{b\ h}{2} = \dfrac{(10 \text{ cm})(7.9 \text{ cm})}{2}$

A = 39.5 cm^2

P = a + b + c = 10.64 cm + 8.41 cm + 10 cm

P = 29.05 cm

Ejemplo # 3.- Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo dados los tres lados (LLL)



Datos: incógnitas:

a = 7 ft A = ?

b = 12 ft B = ?

c = 9 ft C = ?

Ley de los cosenos:

$(7\ ft)^2 = (9\ ft)^2 + (12\ ft)^2 - 2\ (9\ ft)\ (12\ ft) \cos A$

$49\ ft^2 = 81\ ft^2 + 144\ ft^2 - 216\ ft^2 \cos A$

$49\ ft^2 = 225\ ft^2 - 216\ ft^2 \cos A$

$49\ ft^2 - 225\ ft^2 = -216\ ft^2 \cos A$

$-176\ ft^2 = (-216\ ft^2) \cos A$

$$\frac{-176\ ft^2}{-216\ ft^2} = \cos A$$

$0.8148 = \cos A$ es decir, <u>ángulo A = inv cos (0.8148) = 35 .4º</u>

<u>Ley de los senos:</u>

$$7\ ft / \text{sen } A = 9\ ft / \text{sen } C \rightarrow \text{sen } C = \frac{9\ ft \text{ sen } 35.4º}{7\ ft}$$

$$\text{Sen } C = \frac{9\ (0.5797)}{7} = 0.7453$$

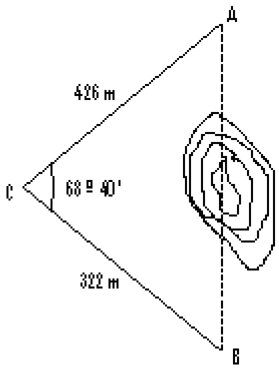
<u>Ángulo C = inv sen 0.7453 = 48.18º</u>

<u>Ángulo B = 96.42º</u>

APLICACIONES DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

El cigüeñal y la varilla conectora de un motor como el ilustrado en la figura son de 30 y 100 cm de longitud respectivamente.

¿Qué ángulo forma el cigüeñal con la horizontal cuando el ángulo formado por la varilla conectora es de 12º?



Ley de los senos:

100 cm /sen x = 30 cm /sen 12º

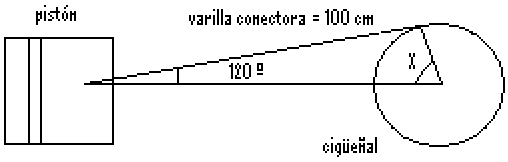
$$\text{Sen } x = \frac{100 \text{ cm sen } 12º}{30 \text{ cm}} = \frac{100 \text{ cm } (0.2079)}{30 \text{ cm}}$$

Sen x = 2.079 /3 = 0.693

X = inv sen 0.693 = 43.8

Para calcular la distancia entre dos puntos A y B separados por un estanque se ha escogido una estación C y se han medido las distancias CA =426 mt, CB = 322 mt, además el ángulo ACB es de 68º 40'.

¿Cuál es la distancia entre A y B?



$c^2 = (426)^2 + (322)^2 - 2\,(426)\,(322)\cos 68.6\,º$

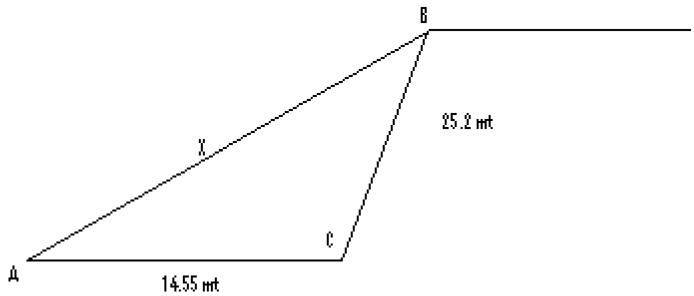
$c^2 = 181476 + 103684 – 2\,(137122)\cos 68.6\,º$

$c^2 = 265100 – 100080.6$

<u>c = 430.2 mt</u>

3.- Un montón de tierra se levanta sobre un plano horizontal y se requiere encontrar la distancia de un punto A de dicho plano a un punto B de parte superior del terraplén. Escójase un punto C en el pie del terraplén que este en el mismo plano vertical de A y B y mídase las distancias AC y CB y también el BAC.

Calcular la distancia entre A y B



Datos: incógnita:

AC = 14.55 m x = ?

BC = 25.2 m

Ángulo BAC = 21º 30’

$$\frac{25.2\text{ m}}{\text{Sen } 21^{\circ}\, 30'} = \frac{14.55\text{ m}}{\text{sen B}}$$

$$\text{Sen B} = \frac{\text{sen } 21^{\circ}\, 30'\ (14.55)}{25.2\text{ mt}}$$

$$\text{Sen B} = \frac{(0.3665)\ (14.55\text{ m})}{25.2\text{ mt}}$$

$$\text{Sen B} = \frac{5.33\text{ mt}}{25.2\text{ mt}} = 0.2115$$

ángulo B = inv sen 0.2115 = 12.2º

Ángulo C = 180º - 35.7º = 146.3º

$$\frac{14.55\text{ mt}}{\text{Sen } 12.2^{\circ}} = x\ /\text{sen } 146.3^{\circ}$$

$$X = \frac{(0.5548)\ (14.55)}{\text{Sen } 12.20^{\circ}}$$

$$x = \frac{(0.5548)\ (14.55)}{0.2113}$$

X = 8.07 /0.2113

X = 38.2 mt

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos ABC, dados:

1.- a = 125 , ángulo A = 54°40’ , ángulo B = 65°10’

Solución: b = 139 , c = 133 , ángulo C = 60°10’

2.- b = 215 , c = 150 , ángulo B = 42°40’

Solución: a = 300 , ángulo A = 109°10’

3.- a = 512 , b = 426 , ángulo A = 48°50’

Solución: c = 680 , ángulo B = 38°50’ , ángulo C = 92°20’

4.- b = 120 , c = 270 , ángulo A = 118°40’

Solución: a = 344 , ángulo B = 17°50’

5.- a = 6.34 , b = 7.30 , c = 9.98

Solución: ángulo A = 39°20’ , ángulo B = 46°50’ , ángulo C = 93°50’

6.- (Aplicación) encuéntrese la medida del ángulo mayor de un triángulo con lados 12, 14 y 18. (Solución: 87°)

7.- (Aplicación) dos lados y el ángulo comprendido de un paralelogramo miden 24 ft, 20 ft y 110°, respectivamente. Encuéntrese la longitud de cada diagonal. (Solución: 36 ft y 25 ft)

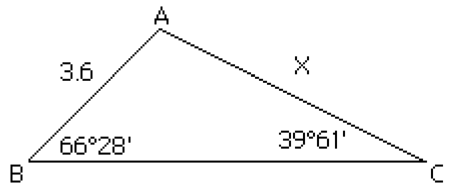
8.- (Aplicación) una barca es conducida por un hombre ligeramente contra la corriente en una dirección que forma un ángulo de 50° con ésta. Si rema a razón de 5 m/h y la velocidad de la corriente es de 9 m/h, calcule la velocidad de la barca y su dirección respecto a la orilla. (Solución: 6.94 m/h, 33°)

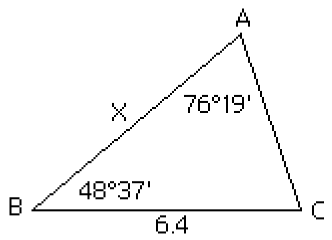
9.- (Aplicación) tres circunferencias cuyos radios respectivos miden 115, 150 y 225 son tangentes exteriores entre sí. Encontrar los ángulos que se forman cuando se unen los centros de las circunferencias. (Solución: 43°10’, 61°20’, 75°30’)

10.- (Aplicación) un barco navega 15 millas en dirección S 40°10’0 y después 21 millas en dirección N 28°20’ 0. Encontrar a qué distancia está del punto de partida y cuál es su orientación respecto a dicho punto. (Solución: 20.9 millas, N 70°40’0)

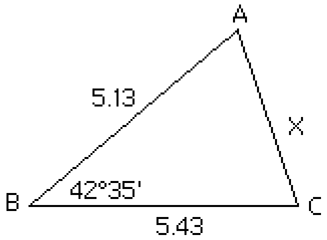
AUTO EVALUACIÓN

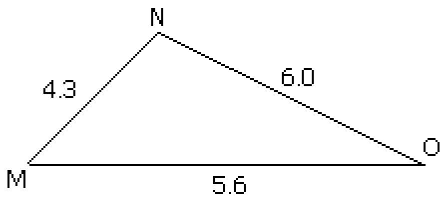
1.- Utilice la ley de los senos para calcular la medida de x en cada uno de los siguientes triángulos.



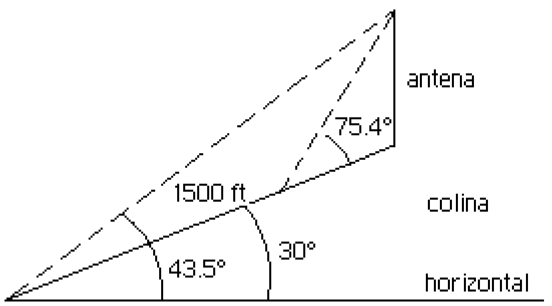


2.- Use la ley de los cosenos para calcular x en cada casco.





3.- Desde una posición en la base de una colina, un observador nota que el ángulo de elevación de la punta de una antena es de 43.5°. Después de caminar 1500 ft hacia la base de la antena sobre una pendiente de 30°, el ángulo de elevación es de 75.4°. Encuentra la altura de la antena de la colina.



GEOMETRÍA ANALÍTICA.

Ingeniería Industrial.

Ingeniería Electromecánica.

Ingeniería Electrónica.

Ingeniería en Gestión Empresarial.

Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Ingeniería Mecatrónica.

Ingeniería Bioquímica.

Ingeniería en Materiales.

Ingeniería en Informática.

Ingeniería en Logística.

Ingeniería Aeronáutica.

Ingeniería Química.

Licenciatura en Biología.

Cuadernillo de Teoría y Problemas

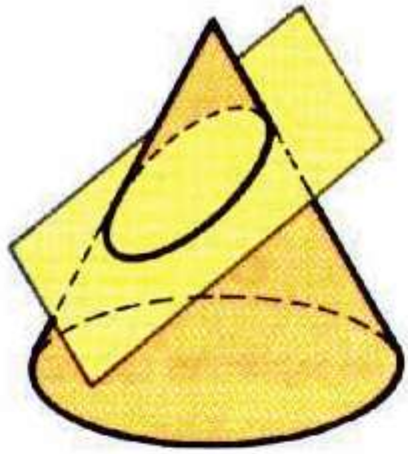
Elaboró:

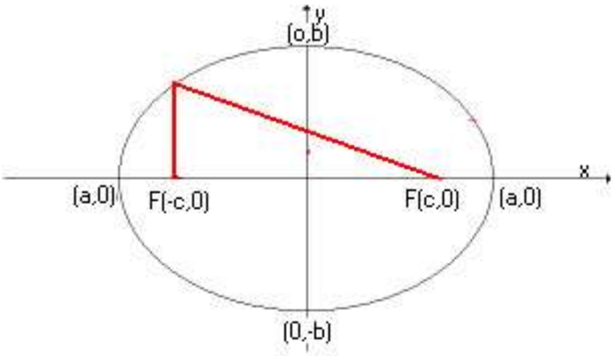
DR. ELISEO AYALA VALDÉS.

YEUDIEL MELGOZA MAGDALENO.

UNIDAD 1

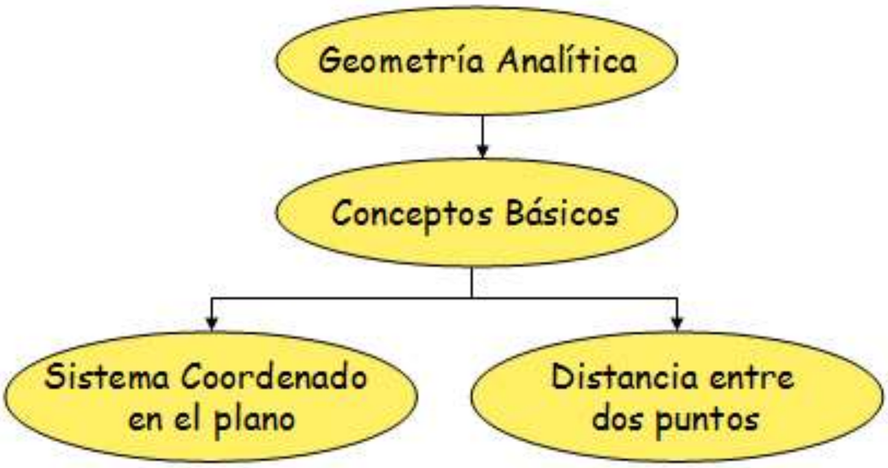
CONCEPTOS BÁSICOS DE

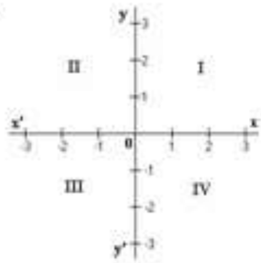




Objetivo: Que el alumno resuelva problemas que impliquen distancias entre puntos y división de un segmento rectilíneo en una razón dada, aplicando las fórmulas y procedimientos correspondientes

Mapa de la Unidad





$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

GEOMETRIA ANALITICA

Parte de las matemáticas que se encarga de la resolución de problemas de la geometría mediante la aplicación del algebra.

SISTEMA COORDENADO EN EL PLANO

Un sistema de ejes coordenados se forma cuando dos líneas rectas se intersectan. Si las rectas son perpendiculares entre sí, se tiene un sistema de ejes coordenados rectangulares o, denominado también, sistema de coordenadas cartesianas (en honor a su creador, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650)).

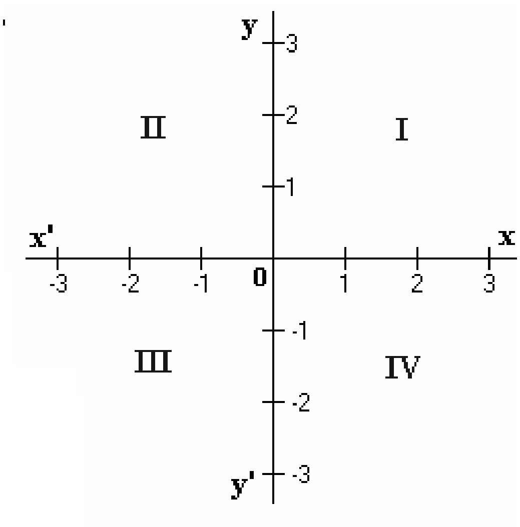
Se traza la recta horizontal xx', se señala un punto sobre esta, denominado origen de coordenadas, **0.** Por el punto **0** trazamos la recta vertical yy';esto es $xx' \perp yy'$(los ejes son perpendiculares entre si). De esta manera, el plano queda dividido en cuatro regiones bien diferenciadas denominas cuadrantes:

- ***x0y***:primer cuadrante(I) ***x´0y***: segundo cuadrante(II)
- ***x´0y***: tercer cuadrante(III) ***xoy´:*** cuarto cuadrante (IV)

Se toma una unidad de medida arbitraria y se gradúan los ejes a partir del origen 0: el eje **xx´** se gradúa positivamente hacia la derecha de 0 y negativamente a la izquierda. El eje ***yy´***s gradúa se gradúa positivamente hacia arriba del eje **xx´**y negativa hacia abajo.

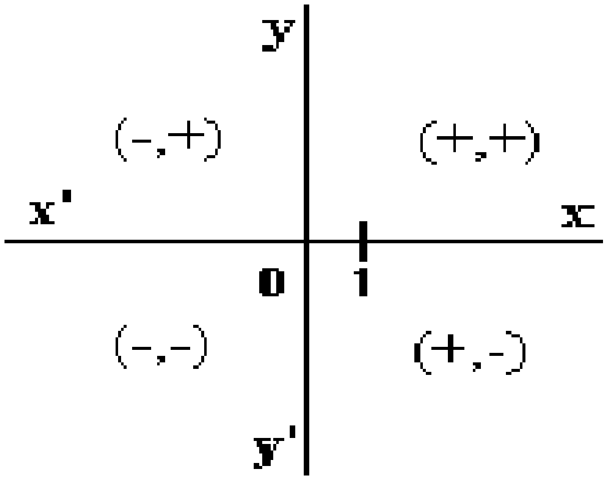
Para simplificar , al eje **xx´** se le llama eje de las equis (eje x)

y al eje ***yy´*** eje de las y(eje y).



- **Abscisas:** los números tomados sobre ele eje x miden las distancias en magnitud y signo del origen a los puntos del eje, y reciben el nombre de abscisas. El eje de las x se denomina por lo tanto, eje de las abscisas.

- **Ordenadas:** los números tomados sobre ele eje y miden las distancias en magnitud y signo del origen a los puntos del eje, y reciben el nombre de ordenadas; por tanto, el eje y recibe el nombre de eje de las ordenadas.



- **Coordenadas de un punto:** establecido en un plano un sistema de ejes coordenados, a cada punto del plano le corresponde un par ordenado de números reales, una *abscisa* y una *ordenada*, que se llaman *coordenadas del punto*. A la derecha de la letra correspondiente del punto se escriben, entre paréntesis y separados por una coma, las coordenadas de éste, primero el valor de la abscisa y luego el de la ordenada. Por ejemplo, si A es un punto en el plano cartesiano, cuya abscisa es 3 y cuya ordenada es 5: se tiene A(3, 5).

Existen dos casos:

Caso1: dado un punto sobre el plano, hallar sus coordenadas. Para determinar dichas coordenadas, se trazan por el punto paralelo a los ejes y se determinan los valores donde estas paralelas cortan a los ejes.

Caso2: dadas las coordenadas de un punto, ubicar el punto en el plano. Se traza una recta perpendicular por la abscisa y otra por la ordenada del punto, la intersección entre estas rectas sitúa al punto en el plano.

Nota: el origen, coordenado, del plano está representado por **O** (0, 0). Los puntos donde la abscisa es 0, quedan ubicados sobre el eje *y*; y, los puntos con ordenadas iguales a 0, se encuentran en el eje x.

Ejemplo:

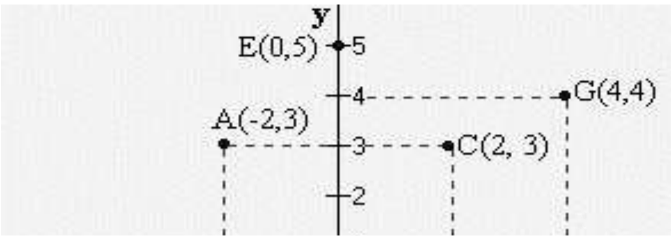
1. Ubicar en un plano cartesiano los siguientes puntos:

(-2, 3), (2, -3), (2, 3), (-2, -3), (0, 5), (5, 0), (4, 4), (-4, -4)

Solución:

Para facilitar su referencia, nombramos los puntos:

A(-2, 3), B(2, -3), C(2, 3), D(-2, -3), E(0, 5), F(5, 0), G(4, 4), H(-4, -4)



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje x o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

Ejemplo: La distancia entre los puntos (-4,0) y (5,0) es 4 + 5 = 9 unidades.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje y o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

Ahora si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

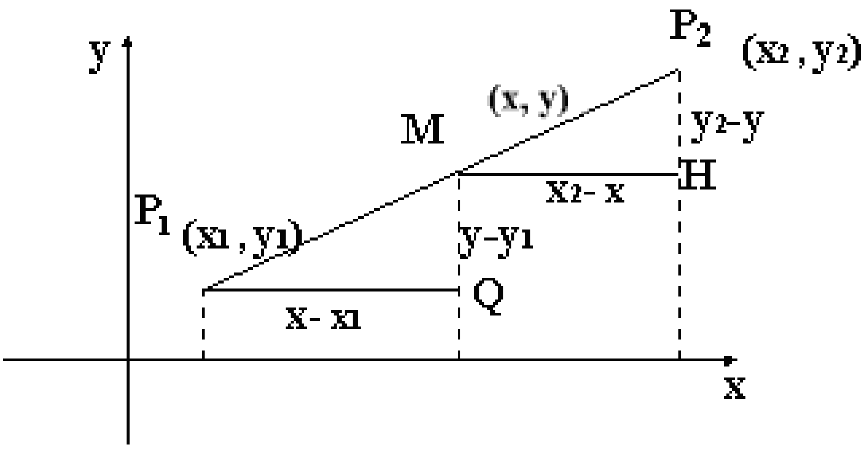
Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos A(x_1,y_1) y B(x_2,y_2) en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa

> Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos A (7,5) y B (4,1)
>
> $d = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2}$ $\qquad d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$
>
> $d = \sqrt{9+16}$
>
> $d = \sqrt{25}$
>
> *d* = 5 unidades

AB y emplear el teorema de Pitágoras.

COORDENADAS DEL PUNTO QUE DIVIDE A UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA. COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO.

Consideremos el segmento $|P_1P_2|$ cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



Sea M (*x*, *y*) un punto sobre el segmento $|P_1P_2|$ y llamemos $\lambda = \dfrac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P_2}}$ (1)

Se trata entonces de encontrar las coordenadas x e y del punto M en términos de λ y de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2.

Al proyectar los puntos P_1, P_2 y M sobre los ejes coordenados, resultan los

triángulos rectángulos semejantes P_2MH y P_1MQ. Entonces podemos escribir:

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{MP_2}{P_1M} \quad (2)$$

Ahora, de (1) $\frac{MP_1}{P_1P_2} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ (Obsérvese que cuando M se mueve de P_1 a P_2, λ varía de manera continua tomando valores entre 0 y 1)

En consecuencia, $\frac{P_1M}{MP_2} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ que al sustituir en (2) resulta:

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

De donde, $\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{y_2 - y}{y - y_1}$ (3) y $\frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ (4)

Al simplificar las ecuaciones (3) y (4) se obtienen finalmente:

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \quad (5)$$
$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) Y (6) resuelven el problema.

Observaciones:

i. Nótese que para cada valor de $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ las ecuaciones (5) y (6) nos dan un punto sobre el segmento P_1P_2.

ii. En muchas ocasiones, el segmento P_1P_2 se expresa en notación de conjunto en la siguiente forma:

$$\overline{P_1P_2} = \left\{ (x,y) \in R^2 \Big/ \begin{matrix} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{matrix} ; 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

iii. Nótese finalmente, que cuando M coincide con el punto medio de $\overline{P_1P_2}$, entonces $\lambda = \frac{P_1M}{P_1P_2} = \frac{1}{2}$ y en consecuencia,

$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$ e $y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$

Es decir, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Que representan las coordenadas del punto medio del segmento P_1P_2.

Ejercicios Propuestos

Trazar la grafica, hallar la distancia entre dos puntos y el punto medio de las siguientes coordenadas.

1. P1 (1.4, 1.4) y P2 (1.7,-1.8)

Solución:

Distancia= 3.21403174, **Punto Medio** (1.55, -0.2)

2. P1 (-0.7, 3.3) y P2 (-2,-0.6)

Solución:

Distancia= 4.11096096, **Punto Medio** (-1.35, 1.35)

3. P1 (4.7, 6) y P2 (0.7, 4.9)

Solución:

Distancia= 4.1484937, **Punto Medio** (2.7, 5.45)

4. P1 (2.5, 2.7) y P2 (-1.6, -0.5)

Solución:

Distancia= 5.20096145, **Punto Medio** (0.45, 1.1)

5. P1 (2.9, 4.2) y P2 (4.7, 5.7)

Solución:

Distancia= 2.3430749, **Punto Medio** (3.8, 4.95)

6. P1 (1.6, 4) y P2 (1.4, 3.3)

Solución:

Distancia= 0.72801099, **Punto Medio** (1.5, 3.65)

7. P1 (5.3, 2.2) y P2 (3.4, -1.9)

Solución:

Distancia= 4.51884941, **Punto Medio** (4.35, 0.15)

8. P1 (1.3, 4) y P2 (2.7, -2)

Solución:

Distancia= 6.16116872, **Punto Medio** (2, 1)

9. P1 (-2.9, -0.6) y P2 (1.3, 1.4)

Solución:

Distancia= 4.65188134, **Punto Medio** (-0.8, 0.4)

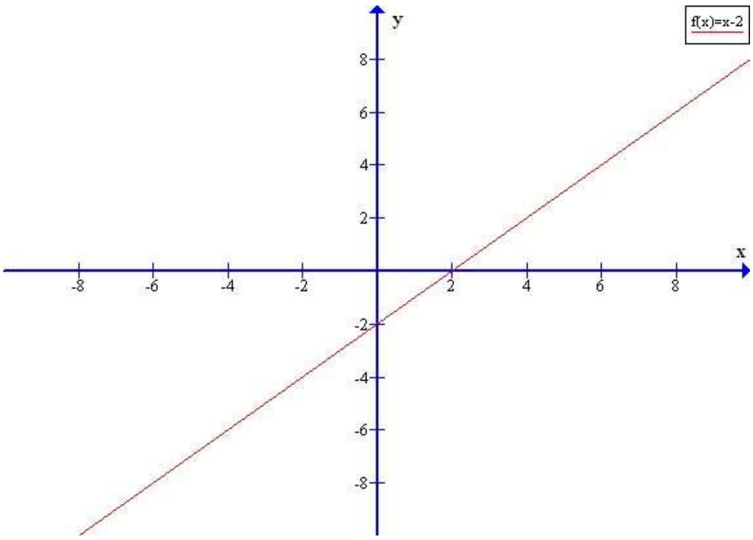
10. P1 (5.7, -2) y P2 (0.1, 0.1)

Solución:

Distancia= 5.98080262, **Punto Medio** (2.9, -0.95)

UNIDAD 2

LA RECTA



Objetivo: Que el alumno utilice las formas particulares de la recta en la resolución de problemas dados.

Mapa de la Unidad

Geometría Analítica

La Recta

Pendiente de una Recta

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Formas de la Ecuación de la Línea Recta

$$y = mx + b$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = const = \tan\theta = m$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$Ax + By + C = 0$$

Distancia de un Punto a una Recta

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A_2 + B_2}}$$

LA RECTA

La recta es el lugar geométrico de puntos, que se mueven en un plano de tal forma que tomados dos a dos, su pendiente es siempre la misma.

PENDIENTE DE UNA RECTA

El ángulo $\theta(0 \leq \theta \langle \pi)$ que forma una recta L con el eje x medido en el sentido positivo del eje a la derecha L, se llama: **ángulo de inclinación** de la recta L.

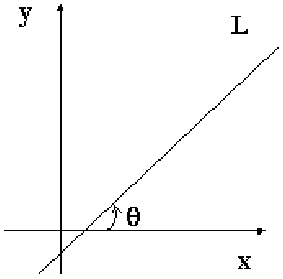
Si L es una recta no vertical, la pendiente de la recta L, denotada por m, se define como el valor de la tangente de su ángulo de inclinación. Es decir, $m = \tan\theta$ (1).

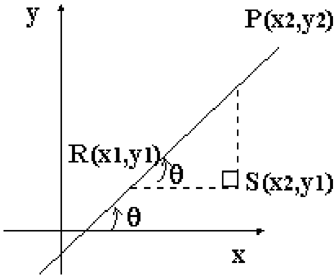
Siendo $0 \leq \theta \langle \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$

El número m se conoce también con el nombre de coeficiente angular de la recta L.

Observaciones:

Si la recta L es vertical, su ángulo de inclinación es 90° y por lo tanto su pendiente *m* = *tan* =90° no está definida.





(a) (b)

Si $P_1(x_1, y_1)$ y P_2 (x_2, y_2) son dos puntos distintos sobre una recta no vertical L *Fig. (b)*, entonces de acuerdo a la definición de pendiente se tiene:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_2 \neq x_1 \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son equivalentes y en lo sucesivo haremos uso indistinto de ellas. Nótese que el coeficiente angular m es igual al incremento de ordenadas dividido por el incremento de abscisas.

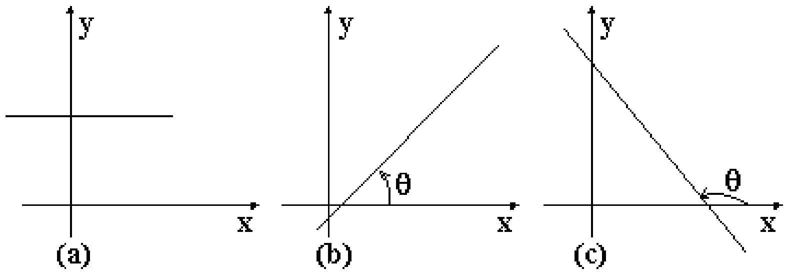
El nombre de pendiente de una recta esta justificado. Cuando se dice que un camino tiene la pendiente 5%, significa que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades, es decir, el cociente de las ordenadas por las abscisas correspondientes es 5/100.

La pendiente de una recta puede ser positiva, negativa o cero, según el ángulo de inclinación de la recta, así:

Si $\theta = 0°$ entonces m= 0 (fig. sig. (a))

Si $0° < \theta < 90°$ entonces m > 0 (fig. sig. (b))

Si $90° < \theta < 180°$ entonces m < 0 (fig. sig. (c))



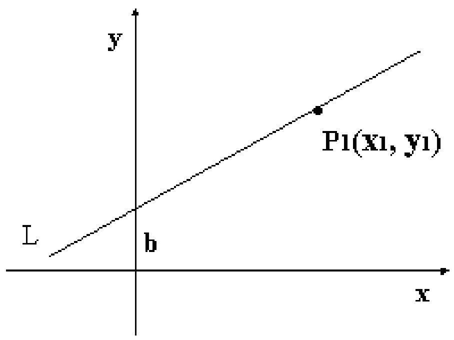
El valor de la pendiente de una recta no depende de la elección particular de los puntos P_1 y P_2 escogidos sobre ellas.

Dados 3 puntos P_1, P_2 y P_3 del plano, se dice que son colineales si y solo si, la pendiente determinada por P_1 y P_2 es igual a la determinada por P_2 y P_3.

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA LINEA RECTA

➢ ECUACIÓN DE LA RECTA "PUNTO – PENDIENTE"

Considere la recta *l* que pasa por un punto dado $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente m también es conocida.



Al llamar b al intercepto de la recta *l* con el eje *y*, entonces la ecuación de *l*, viene dada por:

$$y = mx + b \qquad (1)$$

Como $P_1(x_1, y_1) \in l$, entonces satisface (1) y en consecuencia se tiene:

$$y_1 = mx_1 + b \qquad (2)$$

Al restar de la ecuación (2) la ecuación (1) se elimina el parámetro b que se desconoce y se obtiene:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right) \text{ (3)}$$

La ecuación (3) es conocida como la forma: punto-pendiente de la ecuación de la recta.

Nótese que la ecuación (3) también puede escribirse en la forma:

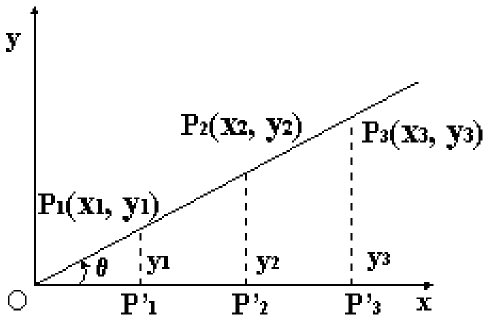
$$y = mx + (y_1 - mx_1).$$

Lo que indica que el intercepto b con el eje y viene dado por:

$$b = y_1 - mx_1$$

- **ECUACIÓN DE LA RECTA "PENDIENTE – ORDENADA"**

Considere la recta l que pasa por el origen 0 y forma un ángulo de inclinación θ con el eje x.



Tómese sobre la recta los puntos $P_1(x_1, y_1)$,P_2 (x_2, y_2) y P_3 (x_3, y_3). Al proyectar los puntos P_1, P_2 y P_3 sobre el eje x, se obtienen los puntos P_1, P_2, P_3.

Como los triángulos $OP_1P'_1$, $OP_2P'_2$ y $OP_3P'_3$ son semejantes; se tiene que:

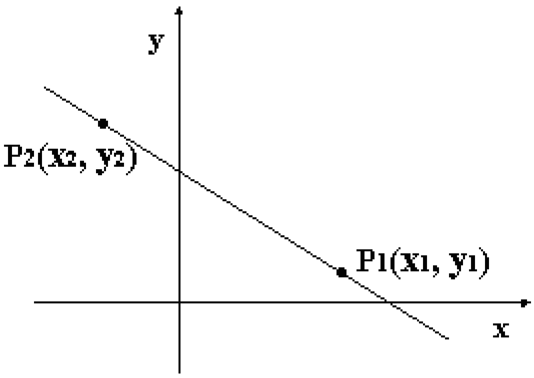
$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = const = \tan\theta = m$$

Esto es, cualquiera que sea el punto $P(x, y)$ sobre l, $\frac{y}{x} = m$ ó $y = mx$ (1)

La ecuación (1) es la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente conocida m.

- **ECUACIÓN DE LA RECTA "PUNTO - PUNTO"**

Sea *l* la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y llámese m_1 su pendiente.



Como *l* pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m_1, se tiene de acuerdo a 4.4.3, que

$$y - y_1 = m_1 (x - x_1) \quad (1)$$

representa la ecuación de dicha recta.

Ahora, como el punto $P_2(x_2, y_2) \in l$, entonces satisface su ecuación.

Esto es $y_2 - y_1 = m_1(x_2 - x_1)$; de donde $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (3) \quad x_2 \neq x_1$$

La ecuación (3) se conoce como la forma: dos-puntos de la ecuación de la recta.

Observaciones

Nótese que la ecuación (2) nos proporciona el valor de la pendiente m y la ecuación (3) también puede escribirse en la forma:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left[y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right]$$

Lo que indica que el intercepto de la recta *l* con el eje *y* viene dado por:

$$b = y_1 - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si (x, y) es un punto cualquiera de la recta determinada por $P_1(x_1 y_1)$ entonces la ecuación de la resta (3) también puede escribirse en forma de determinante, así:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

➢ ECUACIÓN GENERAL DE LA LÍNEA RECTA

La ecuación *Ax* + *By* +*C* = *0* donde *A, B, C* son números reales y *A, B* no son simultáneamente nulos, se conoce como la ecuación general de primer grado en las variables x e *y*.

La ecuación explícita de la recta cuando se conocen dos puntos excluye las rectas paralelas al eje *y*, cuyas ecuaciones son de la forma *x* = constante, pero todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluidas en la ecuación $Ax + By + C = 0$ que se conoce como: la ecuación general de la línea recta, como lo afirma el siguiente teorema:

TEOREMA

La ecuación general de primer grado *Ax* + *By* + *C* = *0 (1), A, B, C* $\in$*R; A* y *B* no son simultáneamente nulos, representan una línea recta.

Demostración

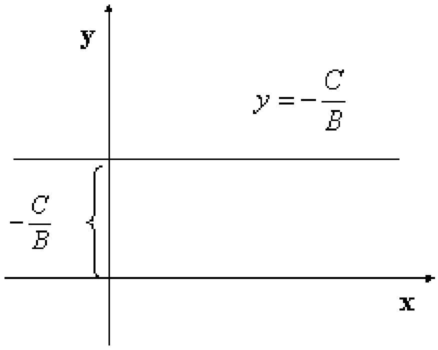
Se puede Considerar varios casos:

A = *0*, *B* diferente de *0*.

En este caso, la ecuación (1) se transforma en *By* + *C* = *0*, *0* de donde

$$y = \frac{-C}{B} \quad (2)$$

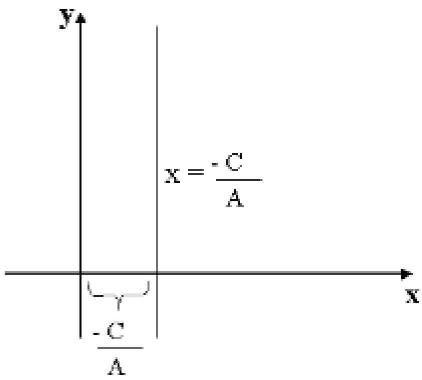
La ecuación (2) representa una línea recta paralela al eje x y cuyo intercepto con el eje y es $-\dfrac{C}{B}$



$A =\neq 0, B = 0$ En este caso, la ecuación (1) se transforma en *Ax + C = 0*, de donde

$$x = -\frac{C}{A} \quad (3)$$

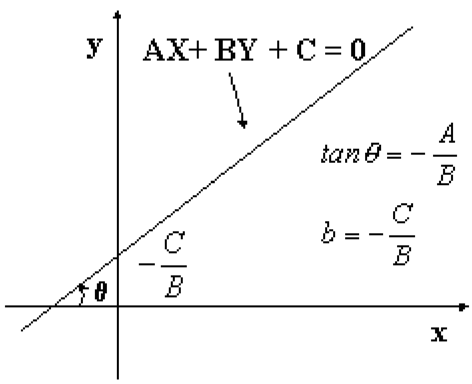
La ecuación (3) representa una línea recta paralela al eje *y* y cuyo intercepto con el eje x es $-\dfrac{C}{A}$



$A =\neq 0, B \neq 0$ En este caso, la ecuación (1) puede escribirse en la siguiente forma:

$$y = \frac{-A}{B}x + \left[\frac{-C}{B}\right] \quad (4)$$

La ecuación (4) representa una línea recta, cuya pendiente es $m = -\dfrac{A}{B}$ y cuyo intercepto con el eje *y* viene dado por $b = -\dfrac{C}{B}$



Observaciones

Es posible escribir la ecuación general de la línea recta en varias formas, de tal manera que solo involucre dos constantes. Es decir, si A, B y C son todos distintos de cero, podemos escribir la ecuación (1), en las siguientes formas equivalentes:

$$x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}=0 \text{ (1A)}$$

$$\frac{A}{B}x+y+\frac{C}{B}=0 \text{ (1B)}$$

$$\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+1=0 \text{ (1C)}$$

En cada una de las ecuaciones (1A), (1B) y (1C) existe esencialmente solo dos constantes independientes, por ejemplo $\frac{B}{A}y\frac{C}{A}$ en (1A).

Esto indica que para determinar la ecuación de una recta en particular, necesitamos conocer dos condiciones, como por ejemplo, dos puntos, un punto y la pendiente, en concordancia con lo establecido en los numerales anteriores.

Cuando la ecuación de una recta esta expresada en la forma general *Ax + By + C = 0*, su pendiente ó coeficiente angular con respecto al eje x, m viene dado por: $m=-\frac{A}{B}$ y su coeficiente angular n, con respecto al eje y viene dado por $n=-\frac{B}{A}$. Los coeficientes *A* y *B* se denominan coeficientes directores de la recta.

- **ECUACION SIMETRICA DE LA RECTA**

Si la recta no pasa por el origen O *(0 , 0)* y P *(a , 0)* y Q *(0 , b)* son los puntos de intersección de la recta con los ejes *x* e *y* respectivamente, entonces su ecuación simétrica es de la forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

Dadas las rectas r_1: $\begin{cases} x = a + bt \\ y = c + dt \end{cases}$

r_2: $\begin{cases} x = a' + b't \\ y = c' + d't \end{cases}$

Para hallar su posición relativa, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas, t y s:

$\begin{cases} a + bt = a' + b't \\ c + dt = c' + d't \end{cases}$ Igualamos la x y la y de las dos rectas utilizando parámetros distintos, t y s, para una y otra.

Si el sistema tiene solución única (t_0, s_0), las rectas se cortan en un punto, cuyas coordenadas se obtienen sustituyendo, en r_1, t por t_0, o bien, en r_2, t por s_0

Si el sistema no tiene solución, las rectas son paralelas.

Si el sistema tiene infinitas soluciones, son la misma recta.

Posición relativa de rectas dadas en forma general

Sistema con las rectas	$\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C = 0 \end{matrix}\right\}$

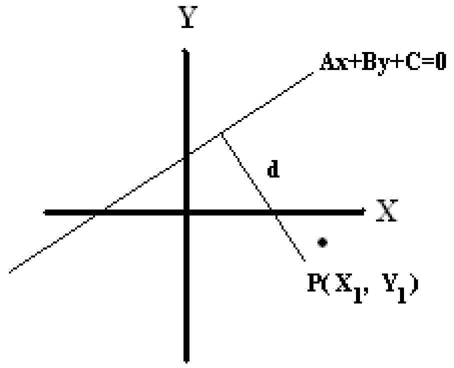
Solución única	Se cortan en 1 punto	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$
No tiene solución	Paralelas	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
Infinitas soluciones	Son la misma recta	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

DISTANCIA PERPENDICULAR DE UN PUNTO *P(X₁,Y₁)* A UNA RECTA *Ax+By+C=0*

La distancia de un punto a una recta esta dada por la ecuación que se presenta a continuación:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A_2 + B_2}}$$

Donde *A, B, C* son los coeficientes de la recta en cuestión, dada en su forma general y *x1*, *y1* son las coordenadas del punto desde donde se calcula la distancia y d es la incógnita solicitada, esto s representa gráficamente de acuerdo con la sig. Fig.



El signo del radical de la ecuación se elige de acuerdo a lo siguiente:

Si la recta dada no pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto *P1* y el origen estén en lados opuestos o del mismo lado de la recta.

Si la recta pasa por el origen, d es positiva o negativa según que el punto *P1* este arriba o debajo de la recta.

Ejemplo:

Determínese la distancia perpendicular del punto *P (2,3)* a la recta *5x+2y-10=0*

Solución:

Efectuamos una grafica de la ecuación, para determinar el signo de d; para tal efecto calculamos las intersecciones de la recta con los ejes *x* y *y*.

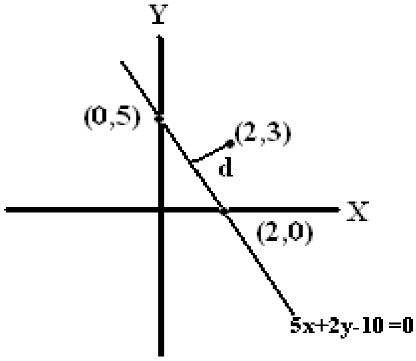
Intersecciones con el eje *x (y=0)*

Si *y=0*, sustituimos en la ecuación dada *5x+2(0)-10=0* de donde x= *10/5=2,*

Intersecciones con el eje *y (x=0)*

Si x=0, sustituimos en la ecuación dada *5(0)+2y=10* de donde *y= 10/2=5*,

Por lo que las coordenadas de intersección son *(2,0)* y *(0,5)*, la gráfica corresponde a la sig. Fig.



De acuerdo a la figura anterior, el punto *P(2,3)* se encuentra del lado opuesto del origen con respecto a la recta la cual no pasa por el origen, por lo tanto la distancia es positiva y el signo del radical también será positivo (si hubiese resultado negativa de acuerdo al criterio establecido el signo se escogerá negativo), la distancia solicitada será por tanto:

$$d = \frac{5(2)+2(3)-10}{\pm\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.-Determine la ecuación de la recta, cuya pendiente es 2/5 y pasa por el punto *(0,0)*.

Solución:

$$y = \frac{2}{5}x$$

2.-Determine la ecuación de la recta, que pasa por los puntos de coordenadas, (*4,5), (7,8*).

Solución:

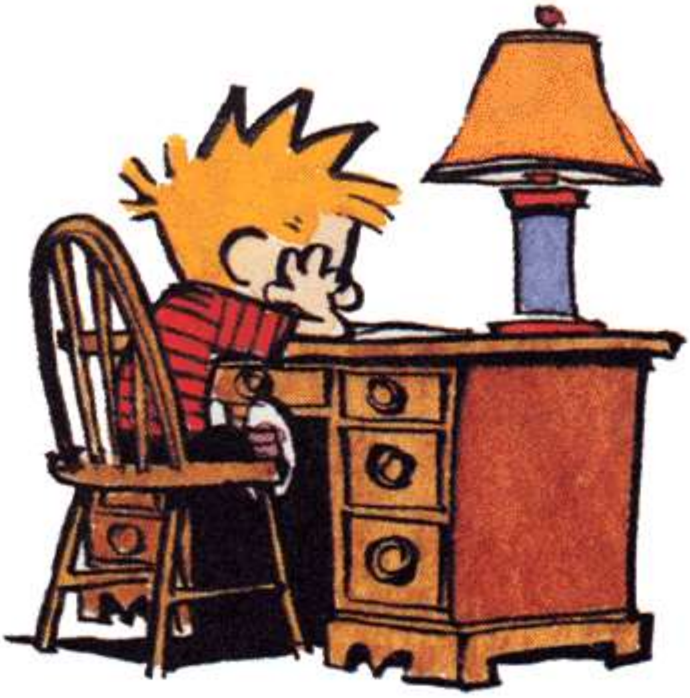
y=x+1

3.-Determine el ángulo entre las rectas que tienen como ecuación *2x+3y-7=0* y *3x-4y+15=0*

Solución:

109.44° o 70.76°

4.-Cual es la ecuación de la recta que pasa por el punto *(4,6)* y es paralela a la recta que pasa por los puntos *(2,3)* y *(7,10)*



Solución:

7x-5y+2=0

5.-Cual seria la ecuación de la recta solicitada en el problema 4, si fueran perpendiculares.

Solución:

5x+7y-62=0

6.-Dada la ecuación de la recta *9x -3y+27=0* determine la ecuación simétrica, así como la ordenada al origen y su pendiente.

Solución:

$\frac{x}{9}-\frac{y}{3}=1,$ *b=3, m=3*

7.-Calcúlese la distancia de la recta del problema anterior al punto *(-1,1)*

Solución: $d=\frac{7}{\sqrt{10}}$

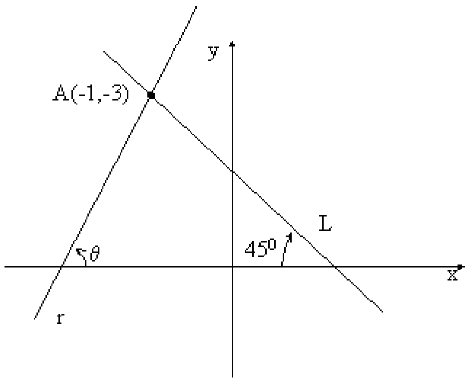
8.-Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto *(8,9)* y es perpendicular a la que tiene por ecuación $3x+y-8=0$.

Solución:

$x-3y+19=0$

9.- Determine las ecuaciones de las rectas *l* y *r* que se muestran en la figura adjunta.

Para la recta *l*, se tiene: $y - 3 = m_l\,(x + 1)$.

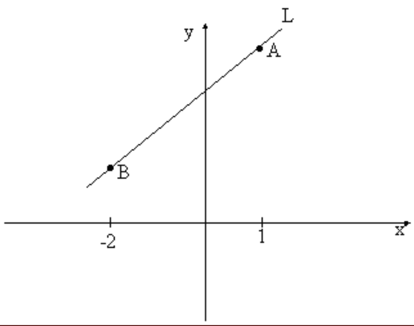


Solución:

$x + y - 2 = 0$ es la ecuación de la recta *l*.

$3x - y + 6 = 0$ representa la ecuación de la recta *r*.

10.- Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A (1, 3)* y *B (-2, 1)*. Determine el intercepto de la recta con el eje *y*.



Solución:

El intercepto es:

$$y = \frac{7}{3}$$

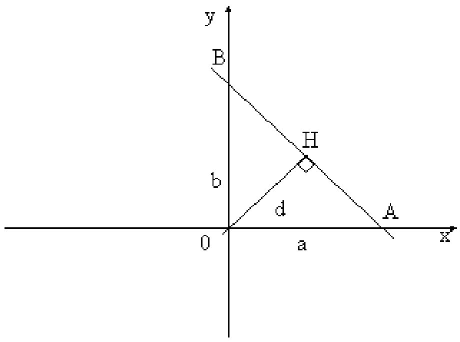
11.- Usando la forma general, determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P_1 (-1, -4)* y *P_2 (5, 1)*

Solución:

$5x - 6y - 19 = 0$

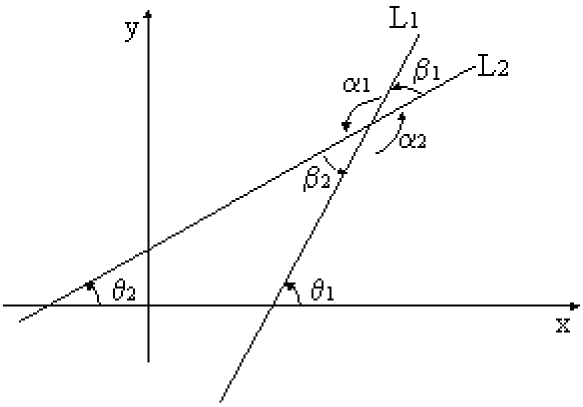
12.- Calcular la distancia del origen a la recta de interceptos **a** y **b** con los ejes coordenados.

$b * a = d * \sqrt{a^2 + b^2}$ de donde $d = \dfrac{a.b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Sean *l_1* y *l_2* dos rectas no verticales, cuyos ángulos de inclinación son q_1 y q_2 respectivamente. Al cortarse las rectas *l_1* y *l_2* forman cuatro ángulos iguales de dos en dos (fig. 4.14.), esto es: $b_1 = b_2 = q_1 – q_2$ y $a_1 = a_2 = 180^0 - b_1$.



Se define el **ANGULO** entre*l_1* y *l_2* como el ángulo positivo obtenido al rotar la recta *l_2* hacia *l_1*.

En este caso, el ángulo entre *l_1* y *l_2* viene dado por:

$b_1 = q_1 - q_2$ (1)

El propósito ahora es establecer una relación entre las pendientes de dos rectas y el ángulo entre ellas.

De la igualdad (1) se tiene:

tan b_1 = tan (q_1 - q_2) $= \dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1 \tan\theta_2} \quad \beta \neq \dfrac{\pi}{2}$, (2)

También,

cot b_1 = cot (q_1 - q_2) $= \dfrac{1+\tan\theta_1 \tan\theta_2}{\tan\theta_1 - \tan\theta_2} \quad \beta_1 \neq 0$, (3)

Puesto que $m_1=\tan q_1$ y $m_2=\tan q_2$, entonces las igualdades (2) y (3) podemos escribirlas en la forma:

$$\tan b_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \qquad \beta_1 \neq \frac{\pi}{2} \text{ , } \quad (2)'$$

$$y \cot b_1 = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2} \text{ , } \beta_1 \neq 0 \quad (3)'$$

Las ecuaciones (2)' y (3)' expresan la tangente y la cotangente del ángulo b_1, entre las rectas l_1 y l_2 en términos de sus pendientes y por medio de ellas se pueden establecer criterios de perpendicularidad y paralelismo entre rectas, como la afirma el siguiente teorema.

- **TEOREMA (Condiciones de Perpendicularidad y Paralelismo)**

Sean l_1 y l_2 dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2 respectivamente.

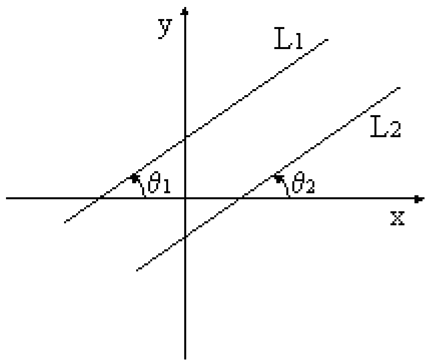
Entonces:

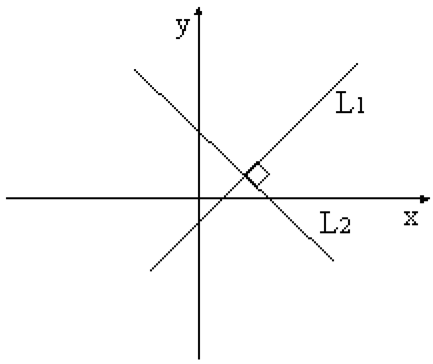
i) l_1 es paralela a l_2 ($l_1 \mid\mid l_2$) $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

ii) l_1 es perpendicular a l_2 ($l_1 \perp l_2$) $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 = -1$

Demostración

En la siguiente figura aparece ilustrada cada una de las situaciones





i. Suponga que $l_1 \,||\, l_2$ y vea que $m_1 = m_2$.

En efecto, como $l_1 \,||\, l_2$, entonces los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales por correspondientes y en consecuencia $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$, es decir, $m_1 = m_2$. Ahora, si $m_1 = m_2$, se sigue de (2)' que $\tan\theta_1 = 0$, y de aquí, $b_1 = q_1 - q_2 = 0$, de donde $q_1 = q_2$ y por lo tanto l_1 y l_2 son paralelas.

ii. Si l_1 y l_2 son perpendiculares, entonces $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ y cot θ_1 = cot $\frac{\pi}{2} = 0$ Sustituyendo este último valor en (3)' obtenemos: $0 = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2}$, de donde $m_1 . m_2 + 1 = 0$, y de aquí se deduce que $m_1 . m_2 = -1$.

Recíprocamente, si $m_1 . m_2 = -1$, entonces $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ y como $m_2 = \tan\theta_2$ y $m_1 = \tan\theta_1$, se tiene que $\tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2$, donde sin pérdida de generalidad hemos escogido la recta l_1 con mayor inclinación θ_1. Teniendo en cuenta que tanto q_1 como θ_2 son ángulos positivos y menores que 180^0, concluimos que: $q_1 = 90^0 + \theta_2$, de donde $\theta_1 - \theta_2 = 90^0$ y por lo tanto las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares.

Observaciones

i. Si las rectas l_1 y l_2 están dadas por las ecuaciones en forma general $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ puesto que $m_1 = -\frac{A}{B}$ y $m_2 = -\frac{A_1}{B_1}$, entonces las condiciones de paralelismo y perpendicularidad del teorema pueden enunciarse en la siguiente forma:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \Leftrightarrow AB_1 - A_1B = 0$$

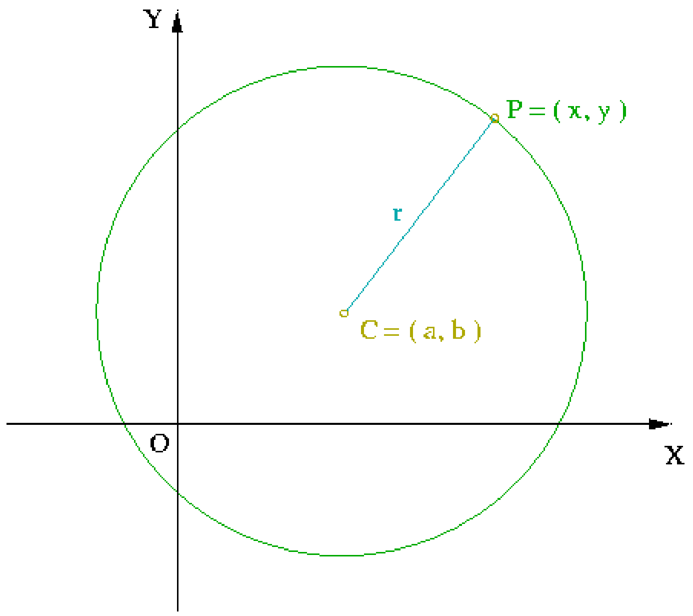
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow AA_1 + BB_1 = 0$$

Un caso especial del paralelismo entre rectas es la coincidencia. Una condición necesaria y suficiente para que dos rectas l_1 y l_2 sean coincidentes es la proporcionalidad entre sus coeficientes. Es decir, las rectas de ecuaciones $Ax + By + C = 0$ y $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ son coincidentes

$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} \Leftrightarrow A_1 = KA, B_1 = KB, C_1 = KC$$

UNIDAD 3

LA CIRCUNFERENCIA



Objetivo: Que el alumno aplique las propiedades analíticas de la circunferencia en la resolución de problemas dados

Mapa de la Unidad

Geometría Analítica

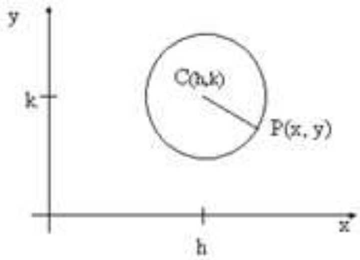
↓

Circunferencia

↓

Formas de la Ecuación
De la Circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$



CIRCUNFERENCIA

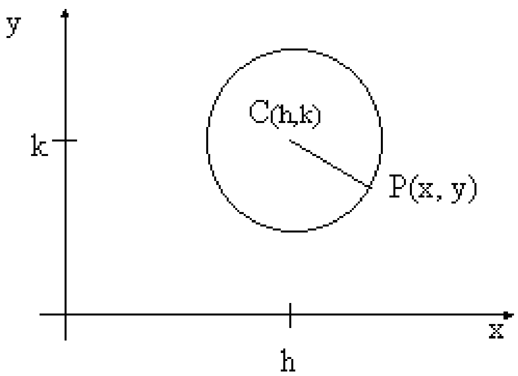
Es el conjunto de puntos que están en un mismo plano y que equidistan de otro punto del mismo plano llamado centro.

La circunferencia y el círculo están íntimamente ligados que los elementos de uno corresponden al otro.

ECUACION ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA

De la definición de la circunferencia y haciendo uso de la distancia entre dos puntos, se tiene que:

Supóngase que el centro C tiene coordenadas *(h, k)* respecto a un sistema ortogonal de ejes *x-y* con origen 0 y que el radio es *r*. Sea *P (x, y)* un punto de la $C_{(C;r)}$.



Entonces:

$$\overline{CP} : r$$

Es decir,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

Por lo tanto:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO AL ORIGEN

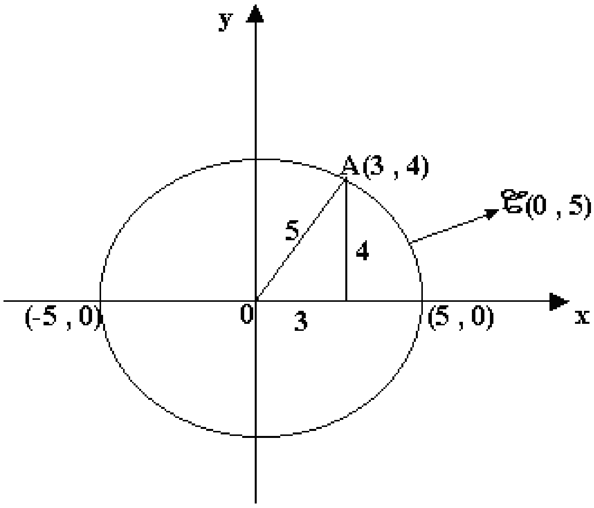
Si C está en el origen, h = k = 0 y la ecuación de la $C_{(o;\, r)}$ es $x^2 + y^2 = r^2$.

La $C_{(0,\, 5)}$ tiene por ecuación: $x^2 + y^2 = 25$.

El punto A(3, 4) $C_{(0,\, 5)}$ ya que: $3^2 + 4^2 = 25$

De (1) se deduce que: $y=\pm\sqrt{25-x^2}$

Lo que muestra que: para todo x $\in$ [-5, 5], el punto $\left(x,+\sqrt{25-x^2}\right)$ está en la semicircunferencia superior y que para todo x $\in$ [-5, 5], el punto $\left(x,-\sqrt{25-x^2}\right)$ está en la semicircunferencia inferior.



REDUCCION DE LA ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA A SU FORMA ORDINARIA

La expresión $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (2)

Donde *A, B, C,* ... son números reales conocidos, se llamará **la ecuación general de segundo grado en las variables x e y.**

Nótese que cuando *A* = *B* = *C* = *0*, la ecuación (2) tiene la forma *2Dx* + *2Ey* + *F* = *0* que representa una recta (siempre y cuando D y E no sean ambos cero).

La ecuación $3x^2 - 2xy + 5y^2 - x + 5y + 7 = 0$ tiene la forma (2).

En este caso *A* = *3, 2B* = *-2, C* = *5, 2D* = *-1, 2E* = *5* y *F* = *7*

Supóngase ahora que en la ecuación (2), *B* = *0, A* = *C* $\neq$ *0.*

Luego de dividir por A, (2) toma la forma:

$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ (3) donde $2d = \dfrac{2D}{A}, 2e = \dfrac{2E}{A}, f = \dfrac{F}{A}$

Completando trinomios cuadrados perfectos en (3) se tiene:

$\left(x^2 + 2dx + d^2\right) + \left(y^2 + 2ey + e^2\right) = d^2 + e^2 - \mathrm{f}$ ó $\left(x + d\right)^2 + \left(y + e\right)^2 = d^2 + e^2 - f$ *(4)*

En el análisis de (4) pueden presentarse tres casos:

Si $d^2 + e^2 - f > 0$, podemos hacer $r^2 = d^2 + e^2 - f$ y escribir $\left(x + d\right)^2 + \left(y + e\right)^2 = r^2$.

Luego, si $d^2 + e^2 - f > 0$, la ecuación (4) representa la circunferencia de centro en C (-d, -e) y radio $r = \sqrt{d^2 + e^2 - f}$.

Cuando $d^2 + e^2 - f = 0$, *(4)* toma la forma $\left(x + d\right)^2 + \left(y + e\right)^2 = 0$, ecuación que solo es satisfecha por las coordenadas del punto *C(-d, -e)*.

Luego, si $\mathrm{d}^2 + \mathrm{e}^2 - \mathrm{f} = 0$, el único punto del plano que satisface (2) es el punto C(-d, -e).

Si $d^2 + e^2 - f < 0$, no hay ningún punto del plano que satisfaga (2). Esto significa que $\left\{\left(\mathrm{x}, \mathrm{y}\right) \hat{I}\mathrm{R}^2 / \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{dx} + 2\mathrm{ey} + \mathrm{f} = 0\right\} = \mathrm{f}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.-Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (4,-5) y su centro es C (2,2).

Solución:

La ecuación de la circunferencia es =53

2.-Reduzca las siguientes ecuaciones dadas en su forma ordinaria y determine que lugar geométrico representan.

a) $36x^2+36y^2+48x-108y+97=0$ Sol. Un punto

b) $x^2+y^2-8x+6y+29=0$ Sol. Una circunferencia imaginario

c) $2x^2+2y^2-6x+10y+7=0$ Sol. Circunferencia con centro (3/2 , -5/2), $r=\sqrt{5}$

3.-Una circunferencia tiene su centro en el punto C (0, -2), y es tangente a la recta $5x-12y+2=0$, hallar su ecuación (sugerencia: recuerde la ecuación para calcular la distancia de un punto a una recta.

Solución:

$x^2+(y+2)^2=4$

4.- Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x-2y-24=0$ y $2x+7y+9=0$.

Solución:

$(x-6)^2+(y+3)^2=25$.

5.- Encuentre la ecuación de la circunferencia de centro en C(-3, 2) y radio 6.

Solución:

$x^2+y^2+6x-4y-23=0$

6.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto común a las rectas: $x+3y-6=0$ y $x-2y-1=0$

Solución:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-2y=0$$

7.- La ecuación: $x^2+y^2+6x-14y-6=0$ representa una circunferencia. Determine su centro *C(h, k)* y su radio *r*.

su

UNIDAD 4

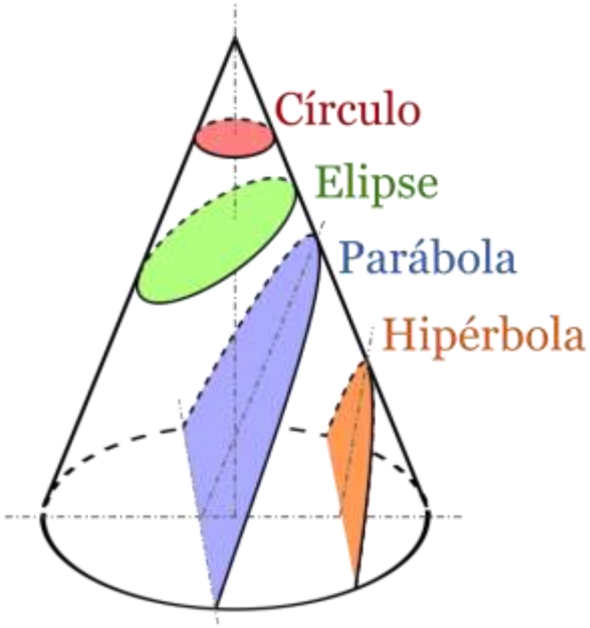
Solución: el centro de la circunferencia es el punto *C(-3, 7)* y radio es *r = 8*.

LAS CÓNICAS

8.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A(0, 6)*, *B(4, -2)* y *C(9, 3)*. Encuentre las coordenadas del centro y el radio.

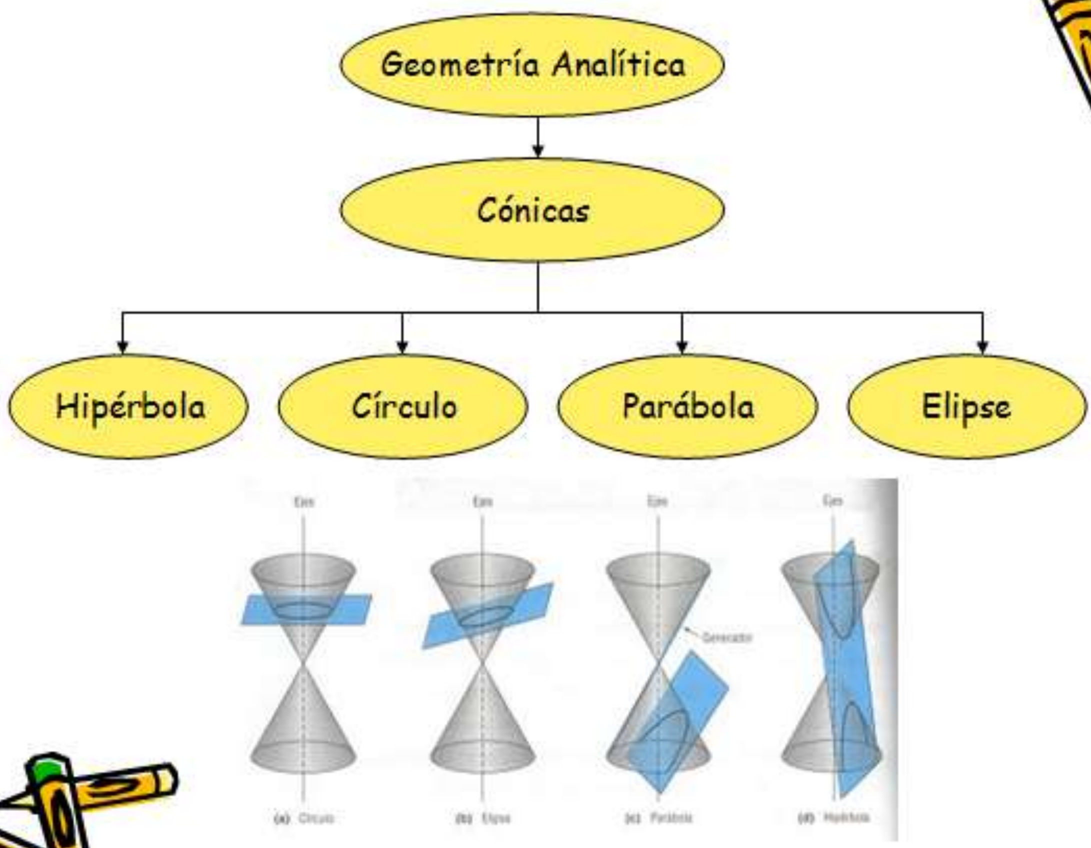
Solución:

Centro en (4, 3) y radio 5.



Objetivo: Que el alumno identifique las diferentes secciones cónicas y sus propiedades, así como poder resolver problemas que impliquen las mismas

Mapa de la Unidad



LAS CONICAS

Apolonio (200 a.c.) fue uno de los primeros estudios de las cónicas y descubrió algunas de sus interesantes propiedades. En la actualidad se estudian aun las cónicas por sus múltiples usos. Los paraboloides de revolución (parábolas giradas alrededor de su eje de simetría) son usados como receptores de señales (por ejemplo, las antenas parabólicas utilizadas en los sistemas de radar y de televisión por cable), como receptores de energía solar y como reflectores (telescopios, proyección de luz, etc.) los planetas giran alrededor del Sol en orbitas aproximadamente elípticas.

Las superficies elípticas pueden ser usadas para reflejar señales como la luz y el sonido desde un lugar a otro. Y las hipérbolas pueden ser empleadas para determinar la ubicación de barcos en el mar.

Los griegos aplicaron los métodos de geometría euclidiana para estudiar las cónicas. Nosotros nos serviremos de los métodos mas poderosos de geometría analítica, combinando el algebra y la geometría, para nuestro estudio de las cónicas. Así, daremos una descripción geométrica de cada cónica y luego, por medio de coordenadas rectangulares y de la formula de distancia, encontraremos las ecuaciones que representen cónicas. Recuerde que nos valimos de este procedimiento cuando definimos un círculo en la sección.

La palabra de cónica se deriva de cono, una figura geométrica que puede ser construida de la siguiente manera: sean a y g dos rectas distintas que se cortan en un punto V. manteniendo la recta a fija, se hace girar la recta g alrededor de a manteniendo el mismo ángulo entre a y g. Al conjunto de puntos generados por la recta g se le llama cono (circulo recto). Véase en la figura 1. La recta fija a es llamada eje del cono; el punto V es su vértice; las rectas que pasan por V y forman el mismo ángulo con a y g son llamados generadores del cono. Así, cada generador es una recta que pertenece por completo al cono. El cono esta constituido por dos partes, llamadas mantos (u hojas), que se cortan en el vértice.

Las cónicas, una abreviación de secciones cónicas, son curvas que resultan de la intersección de un cono (circular recto) y un plano. Las cónicas que estudiaremos en este capitulo surgen cuando el plano no contiene al vértice. Estas cónicas son círculos cuando el plano es perpendicular al eje del cono y corta a cada generador del cono; son elipses cuando el plano esta ligeramente inclinado de modo que corta a cada generador pero solo en un manto del cono; son parábolas cuando el plano es mas inclinado de manera que sea paralelo a un (y solo uno) generador y corta solo a un manto del cono; y son hipérbolas cuando el plano se corta a ambos mantos.

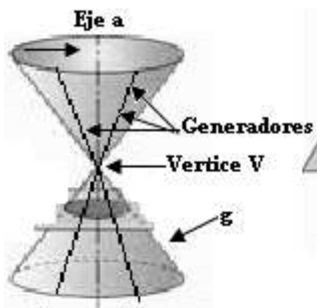


figura 1

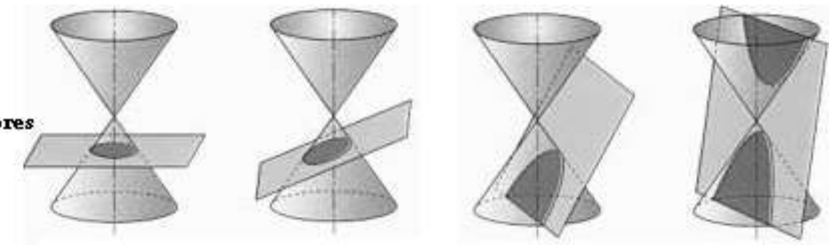


figura 2

PARÁBOLA

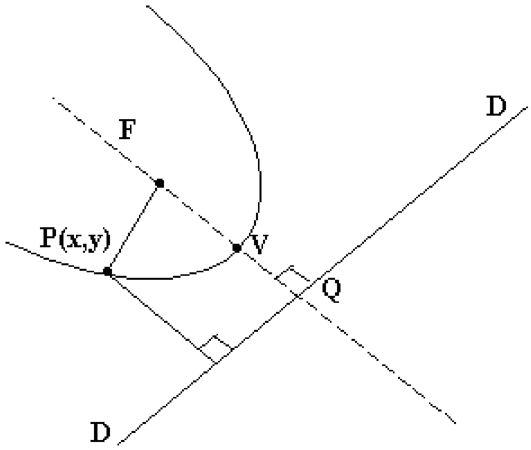
Sea DD una recta dada del plano y F un punto del plano que no está en la recta dada. Se define la parábola como el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia al punto F es igual a la distancia a la recta DD.

La recta dada DD se llama directriz y el punto F se llama FOCO

Frecuentemente se hace referencia a la parábola de directriz DD y de foco F y se denota por PDD-F.

Esto es:

PDD-F={P:PFF=PD}={P: $\frac{PF}{PD}$ = 1}



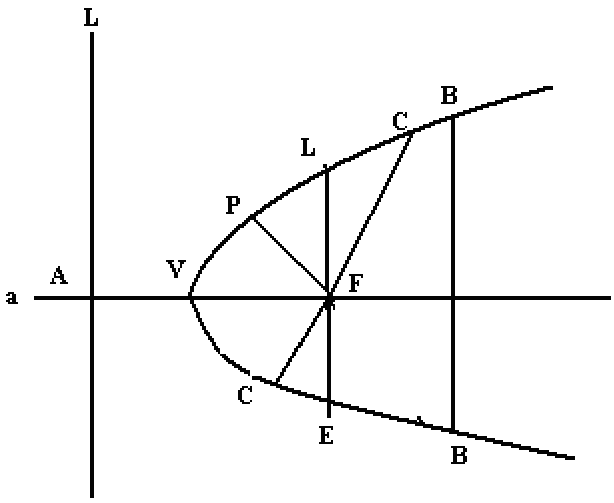
i. Al trazar por F la perpendicular $\overline{QF}$ a la directriz. Se llamará $P = \overline{QF}$: la distancia del foco a la directriz.

ii. Sea V el punto medio del segmento $\overline{QF}$. Como $\overline{VF} = \overline{VQ}$, entonces el punto V pertenece a la parábola. V es llamado VERTICE de la parábola.

El lugar correspondiente a la parábola es simétrico respecto a la recta $\overline{QF}$. En efecto, si P' es el simétrico de P respecto a la recta $\overline{QF}$, entonces PP'' = P''P'. Por lo tanto, el triángulo PP''F es congruente al triángulo P'P''F. De donde P'F =

PF y como P'D' = PD, entonces, $\frac{P'F}{P'D'} = \frac{PF}{PD} = 1$, lo cual nos muestra que P' e PDD-F.

- **ELEMENTOS DE LA PARABOLA**

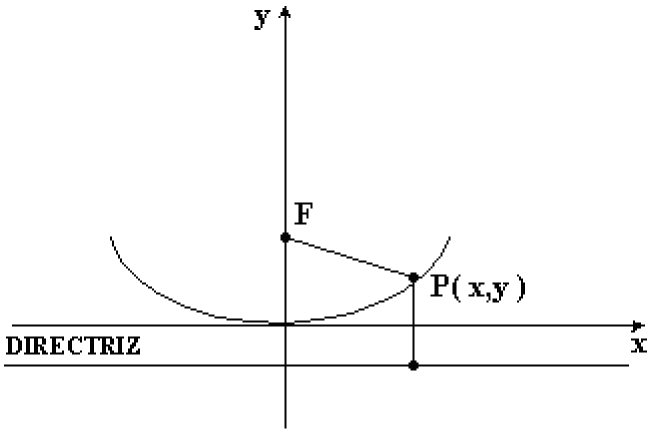


F:	Foco de la parábola
l:	Directriz de la parábola
a	Eje de la parábola
A	punto de intersección entre l y a
V:	vértice de la parábola
BB':	Cuerda de la parábola
CC':	Cuerda focal

LL':	Lado Recto

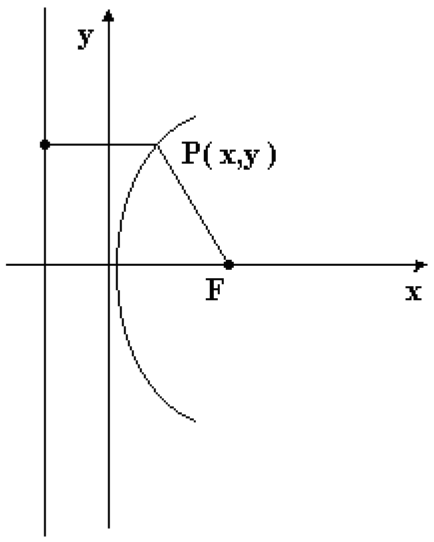
➢ ECUACION DE LA PARABOLA

En esta sección sólo se considerarán parábolas con el vértice V en el origen de coordenadas y cuyos focos estarán localizados sobre los ejes x ó y.



(a)

Sea *P(x, y)* un punto de la parábola PDD-F (fig b) entonces, $\overline{PD} = \overline{PF}$.



b)

Pero, $\overline{PD} = x + \frac{p}{2}$ y $\overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Luego, $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última igualdad, y desarrollando los binomios, se obtiene: $x^2 + \frac{p^2}{4} + px = x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2$, y simplificando queda finalmente, $y^2 = 2px$ (1).

Recíprocamente, sea *P(x, y)* un punto del plano, cuyas coordenadas *(x, y)* satisfacen (1) y pruebe que P e PDD-F.

Por hipótesis, $y^2 = 2px$ (2)

Se debe probar que $\overline{PF} = \overline{PD}$

$$PF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} - px + 2px} = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{4} + px}$$

$$= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2} = PD$$

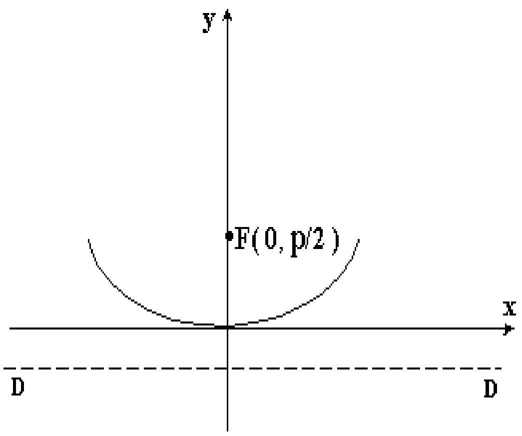
De esta forma se ha demostrado la parte i del siguiente teorema.

- **TEOREMA 1 (Ecuaciones de la Parábola con vértice en el origen y eje sobre uno de los ejes coordenados)**

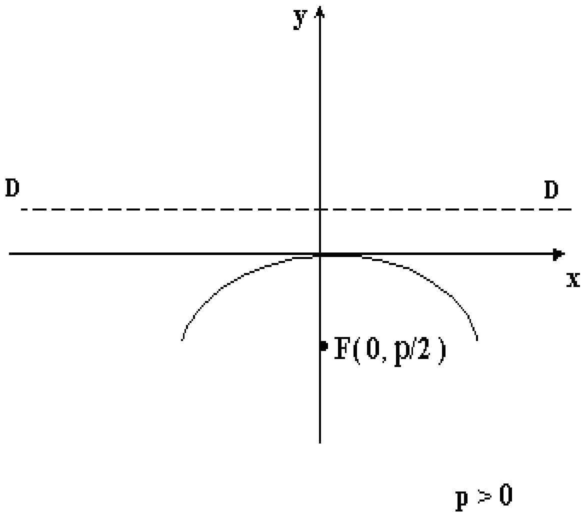
i. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F(p/2, 0) y por directriz la recta x = -p/2 (fig.a) viene dada por : $y^2=2px$ *(3)*. Recíprocamente si un punto P del plano, satisface (3) entonces P - PDD-F

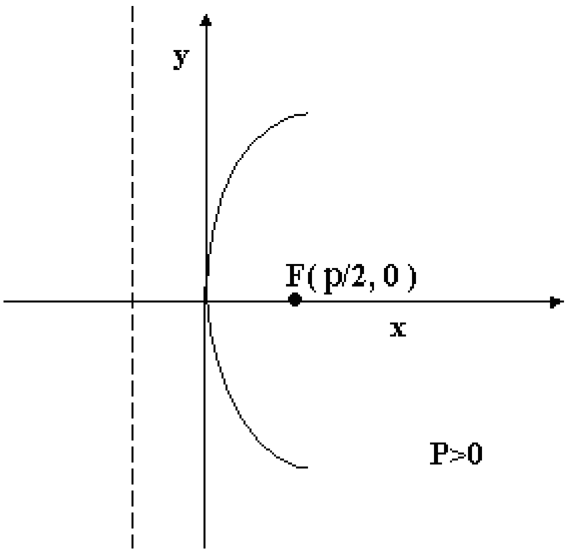
ii. La ecuación de la parábola que tiene su foco en F*(0, p/2)* y por directriz la recta *y = -p/2* (fig. b.) es: $x^2 = 2py$ (4)

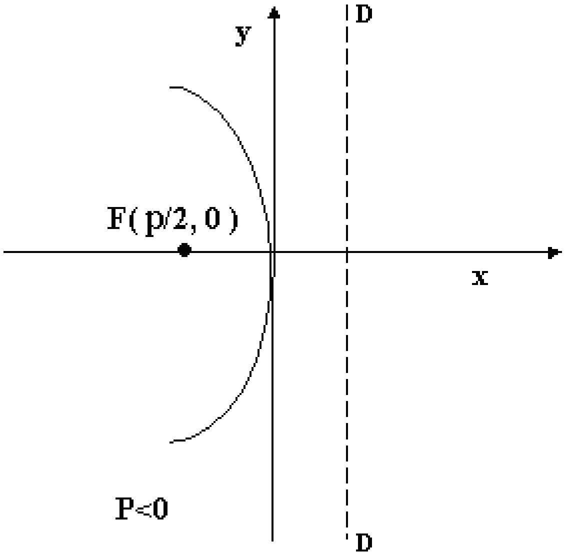
iii. Recíprocamente, si un punto P del plano, satisface (4) entonces P - PDD-F



$p > 0$


y
D
D
x
F(0, p/2)
p > 0


y
F(p/2, 0)
x
P>0



Observaciones:

i. En la figura aparecen las gráficas de dos parábolas abiertas hacia arriba (en el caso de p>0) y hacia abajo (p<0), respectivamente y cuyos focos están localizados en el punto F(0, p/2) y cuya directriz es la recta de ecuación y = -p/2.

Además, todos sus puntos son simétricos con respecto al eje y: de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, presentan únicamente a la variable x elevada en una potencia par.

ii. Igualmente las gráficas de parábolas abiertas hacia la derecha (p > 0) e izquierda (p < 0) respectivamente, con focos en el punto F(p/2, 0) y cuya directriz es la recta de ecuación x = -p/2. Además todos sus puntos son simétricos con respecto al eje x, de aquí que las ecuaciones que representan sus lugares geométricos, poseen únicamente a la variable y elevada a su potencia par.

Traslación de Ejes

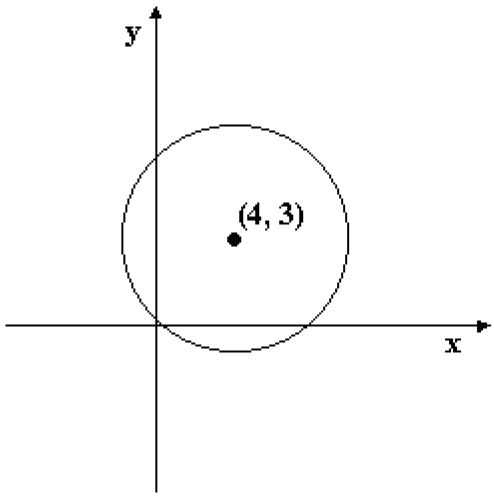
En el ejemplo 5 de la sección 5.6., se determinó que la ecuación de la circunferencia con centro en C(4,3) y radio

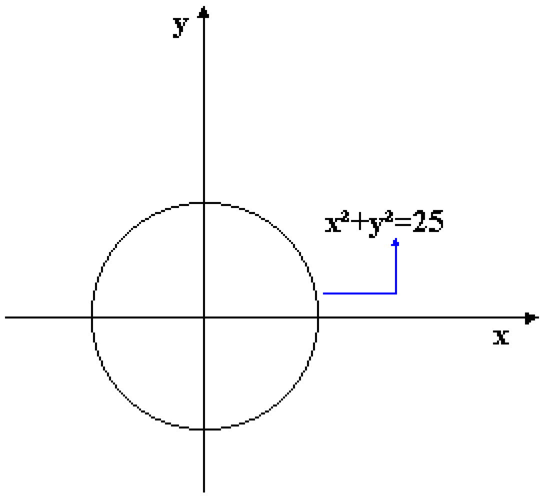
5 era:

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$ ó $x^2+y^2-8x-6y=0$

Sin embargo, si se encuentra la ecuación con centro en C(0, 0) y radio 5. Se obtiene $x^2+y^2=25$.

De lo anterior se concluye que a veces puede cambiar la ecuación sin cambiar la forma de la gráfica (fig.)



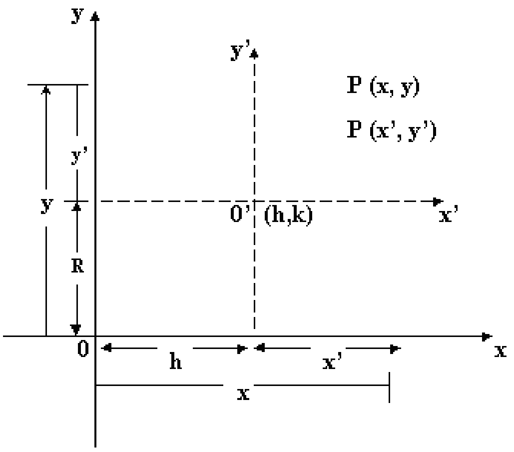


Si en el plano cartesiano x - y se eligen nuevos ejes coordenados paralelos a los ejes x e y, se dice entonces que ha habido una "TRASLACIÓN DE EJES". Al fin de analizar los cambios que se presenten en las coordenadas de los puntos del plano al introducir un nuevo sistema de coordenadas x' e y' paralelo a los ejes x e y, se toma un punto fijo o'(h, k) que se llama: ORIGEN del nuevo sistema.

Sea ahora, un punto P(x, y) del plano, cuyas coordenadas están referidas al sistema con origen O(O, O) Entonces las coordenadas de P(x', y') referidas al sistema x'-y' vienen dadas por las relaciones:

$$x = x' + h \quad (1)$$
$$y = y' + k \quad (2)$$

llamadas: ECUACIONES DE TRASLACIÓN DE EJES, y que pueden deducirse fácilmente de la figura



Observación:

La traslación de ejes modifica la ecuación de una curva y algunas veces la simplifica, pero no altera la forma de la curva.

Una aplicación útil de la traslación de ejes se consigue cuando se obtienen las ecuaciones generales de la parábola, con vértice en el punto V (h, k) referido al sistema x-y y para las cuales la directriz es perpendicular a uno de los ejes.

Si se toma como referencia los ejes x' e y', hallar las ecuaciones de la parábola con vértice en V(h, k), equivale a encontrar las ecuaciones de la parábola con vértice en (0, 0) referido al nuevo sistema.

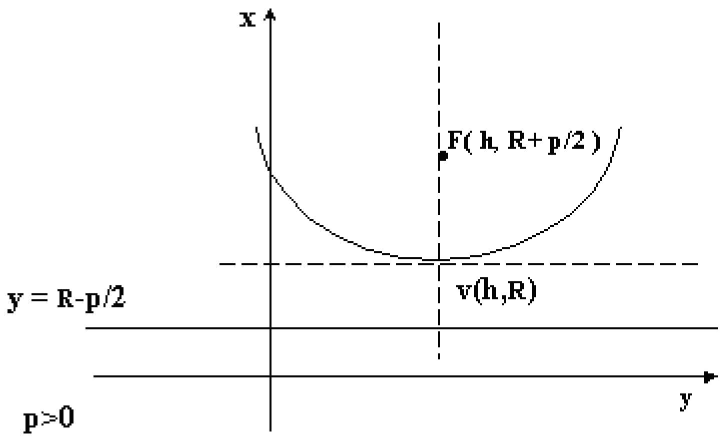
Las ecuaciones $(y')^2 = 2px'$, $(x')^2 = 2py'$ permiten escribir las ecuaciones en forma general de la parábola, como lo afirma el siguiente teorema:

➢ **TEOREMA 2 (Ecuaciones de la parábola con vértice fuera del origen y eje paralelo a uno de los ejes coordenados)**

i. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F\left[h, k + \frac{p}{2}\right]$ y por directriz la recta:

$y = k - \frac{p}{2}$ (fig.) viene dada por:

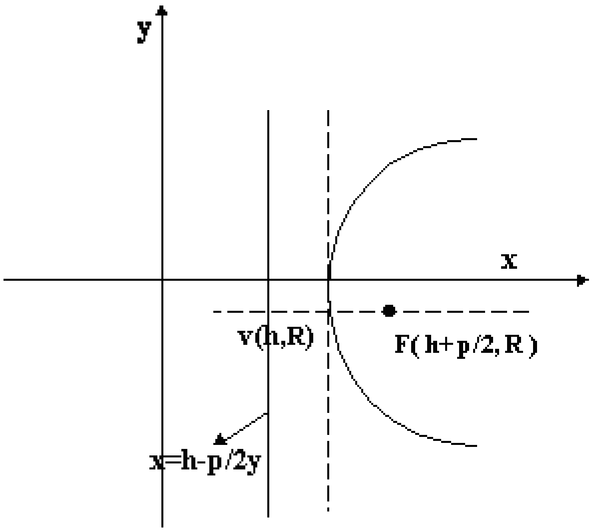
$(x-h)^2 = 2p(y-k)$ (1)



ii. La ecuación de la parábola con vértice en el punto V (h, k), que tiene su foco en $F\left[h + \frac{p}{2}, k\right]$ y por directriz la recta:

$x = h - \frac{p}{2}$ (fig.) viene dada por:

$(y-k)^2 = 2p(x-h)$ (2)



Demostración: $x' = x - h$

Es similar a la del teorema 1, aplicado al sistema x'-y' y luego hacer $x' = x - h$ e $y' = y - k$.

Observación:

Las ecuaciones (1) y (2) del teorema 2, después de simplificarlas, pueden expresarse en la forma:

$$x^2 - 2hx - 2py + (h^2 + 2pk) = 0(3)$$
$$y^2 - 2ky - 2px + (k^2 + 2ph) = 0(4)$$

En las ecuaciones (3) y (4) puede notarse que una de las variables aparece al cuadrado y la otra lineal. La parábola siempre se abre en la dirección del eje cuya variable aparece lineal.

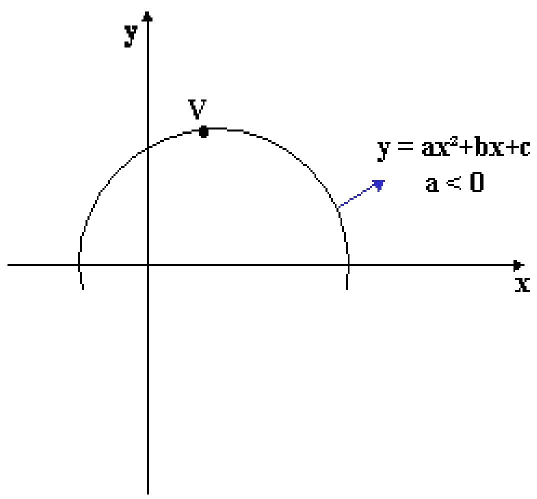
Así por ejemplo, la ecuación (3) representa una parábola que se abre hacia el semieje y positivo (si p > 0) o hacia el semieje y negativo (si p < 0). Igualmente, la ecuación (4) representa una parábola abierta hacia la derecha (si p > 0) o hacia la izquierda (si p < 0).

Valores máximos y mínimos de una parábola

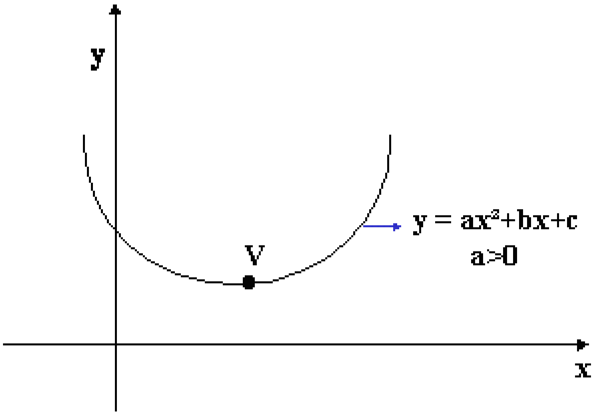
$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

Se ha visto en la sección precedente que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ (1) puede escribirse (completando cuadrados) en la forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$ (2) y representa una parábola cuyo eje focal es vertical, abierta hacia arriba (p > 0) ó hacia abajo (p < 0).

Cuando la ecuación aparece en la forma (1), el signo de a (coeficiente de x^2), determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo y también determina si el vértice es un punto máximo o mínimo de la curva.



(a)



(b)

Si como en la figura (a), la parábola se abre hacia abajo, el vértice V (punto más alto de la curva) es llamado el punto máximo de la parábola. El valor de la ordenada correspondiente es el valor máximo de la función que ella representa.

Similarmente, si la parábola se abre hacia arriba (figura(b)), el vértice V es llamado el punto mínimo de la parábola; y el correspondiente valor de y, es el valor mínimo de la función.

Toda función cuadrática, tiene un valor máximo o un valor mínimo, pero no ambos.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1.- Dada la parábola que tiene por ecuación

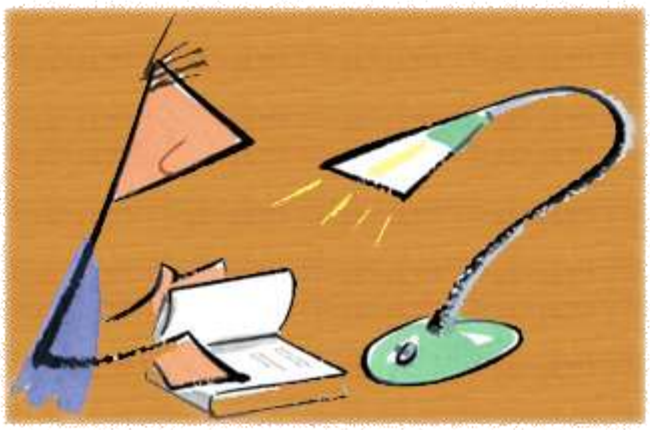
$x^2 = -6y$, encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, analizar la simetría de la curva y trazar la gráfica.

Solución:

Coordenadas del foco F (0, -p/2). La ecuación de la directriz es: $y = \frac{3}{2}$

2.- Dado el punto del plano B(*a, b*) con *a, b* > *0*. Demostrar que por el punto B pasa la parábola $x^2 = \frac{a^2}{b} y$ (1).

Determine el foco y la ecuación de la directriz



Solución:

$$F\left(0, \frac{a^2}{4b}\right) \qquad y = -\frac{a^2}{4b}$$

3.- Dada la ecuación $(y')^2 = 4x'$, referida al sistema x'-y' en donde el nuevo origen es el punto (2, 3). Hallar la ecuación de la gráfica en términos de x e y.

Solución:

$$(y-3)^2 = 4(x-2)$$

4.- Determine el vértice V y la ecuación de la parábola que tiene como directriz la recta de ecuación x = 2 y cuyo foco está localizado en el punto F(4, 2).

Solución:

$$(y-2)^2 = 2p(x-3) \Leftrightarrow (y-2)^2 = 2(x-3)$$

5.- Determine el vértice V, el foco F, la ecuación de la directriz, el eje focal y dibujar la gráfica de la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 3x - 24y - 1 = 0$

Solución:

$$h = \frac{1}{2}, k = -\frac{7}{96}, 2p = 8$$

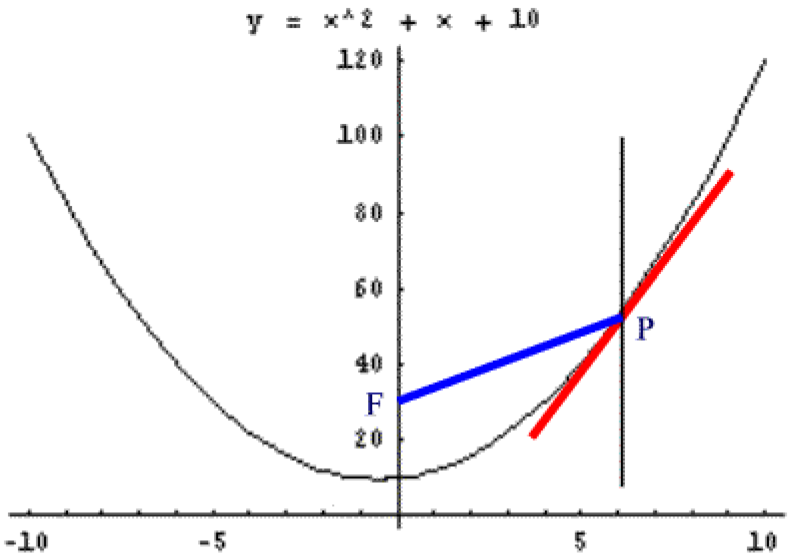
6.- Para la parábola $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0,$ demostrar que el vértice está en el punto $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ y que corresponde a un máximo o un mínimo de acuerdo al signo de a.

Solución:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\quad p=\frac{1}{2a}$$

APLICACIONES

La parábola tiene una propiedad interesante: Si unimos cualquier punto, P, de la parábola con su foco, el ángulo que forman el radio focal con la tangente en ese punto, es igual al ángulo que forma la tangente en ese punto con la recta paralela al eje de la parábola.



Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja paralelo al eje y viceversa (una emisión, de luz o sonido, paralela al eje de la parábola se concentra en el foco.

Los faros de los coches y las antenas parabólicas hacen uso de esta propiedad. (ojo, en ambos casos son paraboloides no parábolas, pero la propiedad se mantiene).

PROPIEDAD DE REFLEXION

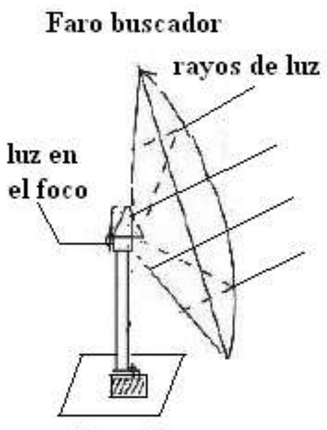


figura 3

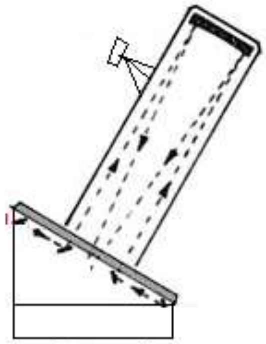


figura 4

Suponga que tenemos un espejo con forma de paraboloide de revolución, una superficie formada al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Si una fuente de luz (o cualquier otra fuente emisora) es colocada en el foco de la parábola, todos los rayos que emanen de ahí se reflejaran en el espejo en líneas paralelas al eje de simetría. Este principio es usado en el diseño de faros buscadores, lámparas de flash para fotografía, ciertos faros de automóviles y otros dispositivos parecidos.

De manera reciproca, suponga que rayos de luz (u otras señales) emanan desde una fuente distante de modo que en esencia son paralelos. Cuando los rayos llegan a la superficie de un espejo parabólico cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, son reflejados hacia un solo punto en el foco de dicho espejo. Este principio es usado en el diseño de algunos dispositivos de energía solar, antenas parabólicas y los espejos usados en algunos tipos de telescopios.

Ejemplo: Antena Parabólica

Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales emanan desde un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas en un solo punto, donde esta colocado el receptor. Si el disco de la antena mide 8 pies diámetro en su abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿en que posición debe estar colocado el receptor?

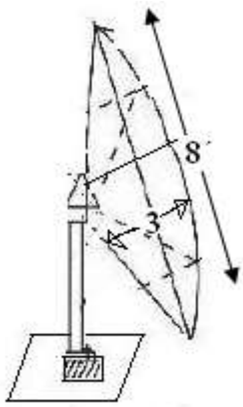
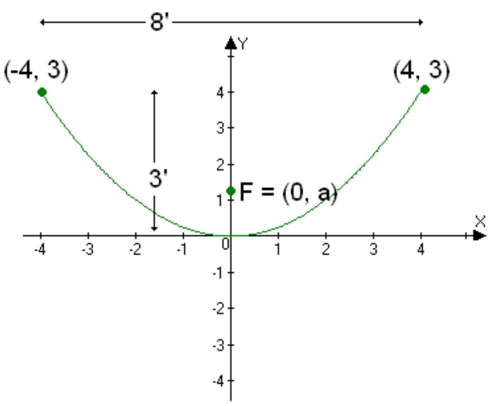


figura 5 (a)



(b)

<u>Solución:</u>

La figura 5 (a) muestra el disco de la antena parabólica. En un sistema rectangular dibujamos la parábola usada para construir el disco, de modo que el vértice de la parábola este en el origen y su foco en el eje positivo del eje y. Véase la figura 5 (b). La forma de la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4ay$$

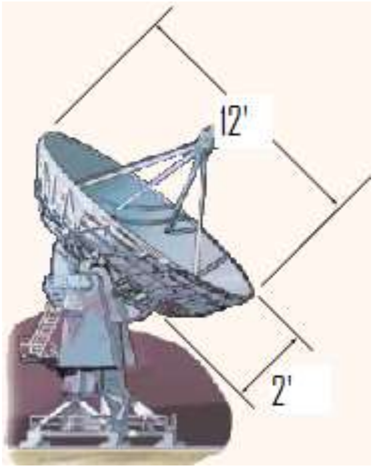
Y su foco esta en (0,a). Como (4,3) es un punto en la grafica, tenemos

$$4^2 = 4a(3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

El receptor debe colocarse a $1\frac{1}{3}$ pies desde la base del disco, a lo largo de su eje de simetría.

Localización del foco de una antena de TV por satélite



El interior de la antena de TV por satélite es un disco con forma de paraboloide (finito) de diámetro de 12 pies y profundidad de 2 pies, como se muestra en la figura. Encuentra la distancia desde el centro del disco hasta el foco.

Solución:

Una ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$, donde p es la distancia requerida desde el centro del disco hasta el foco. Como el punto (2,6) está en la parábola, obtenemos

$$6^2 = (4p)(2) \rightarrow p = \frac{36}{8} = 4.5\, pies$$

→ Encuentra la altura de un punto de un arco parabólico de 9 m de altura y 12 m de base, si se encuentra situado a 4 m del centro del arco.

Parábola del tipo $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$V(0,9)$, entonces $\begin{aligned}(x-0)^2 &= 4p(y-9)\\ x^2 &= 4p(y-9)\end{aligned}$

La curva pasa por (6,0), por lo que las coordenadas deben satisfacer su ecuación:

$$\begin{aligned}&(6)^2 = 4p(0,9)\\ &36 = -36p \therefore\ p = -1\end{aligned}$$

Entonces la ecuación del arco parabólico es:

$$x^2 = -4(y-9)$$

Como el punto (4,h) pertenece a la curva, también debe satisfacer su ecuación:

$$\begin{aligned}&(4)^2 = -4(h-9)\\ &16 = -4(h-9)\\ &-4 = h-9 \therefore h = 5\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos:

1.- Antena parabólica: una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde esta colocado al receptor. Si el disco de la antena tiene 10 pies de diámetro en su abertura y 4 pies de profundidad en su centro. ¿En que posición debe estar colocado el receptor?

Solución:

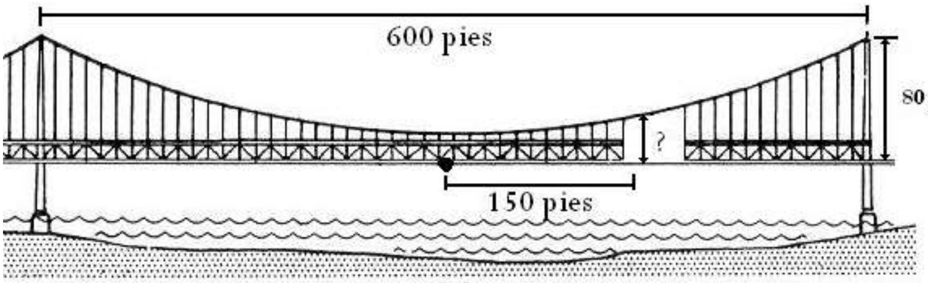
1.5625 pies desde la base del disco, a lo largo del eje de simetría.

2.- Construcción de una lámpara de flash fotográfico. El reflector de un flash tiene la forma de paraboloide de revolución. Su diámetro es de 4 pulgadas y su profundidad de 1 pulgada. ¿a que distancia del vértice debe colocarse la bombilla de modo que los rayos se reflejen de manera paralela al eje?

Solución:

1 pulgada desde el vértice

3.- Puentes colgantes: Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma parabólica, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen los cables están separadas 600 pies y son de 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie de la carretera a la mitad de la distancia entre las torres, ¿Cuál es la altura del cable en un punto situado a 150 pies desde el punto medio?



Colgante
figura 6

Solución:

20 pies

4.- Faros buscadores: un faro buscador tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz esta colocada a 2 pies de la base en el eje de simetría y la abertura es de 5 pies de diámetro, ¿Qué profundidad tiene el faro buscador?

Solución:

0.78125pies

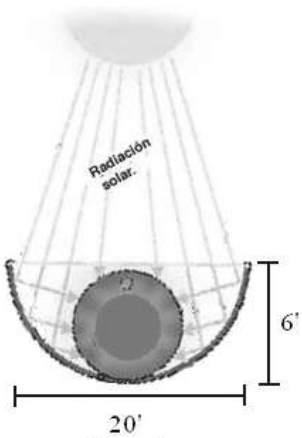


figura 7

5.- Calentador solar: un espejo en forma de paraboloide de revolución será usado para concentrar los rayos del Sol en su foco, creando una superficie calorífica. Si el espejo es de 20 pies de diámetro en su abertura y de 6 pies de profundidad, ¿Dónde se concentra la fuente de calor?

Solución:

4.17 pies desde la base a lo largo del eje de simetría

6.- Arco Parabólico de un puente: Un puente esta construido en forma de arco parabólico. El puente tiene una extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Véase la figura 8. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a las distancias de 10, 30 y 50 pies desde el centro.

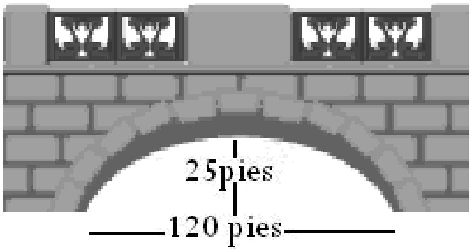


figura 8

Solución:

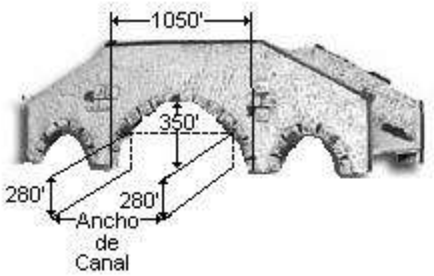
24.31 pies, 18.75 pies, 7.64 pies

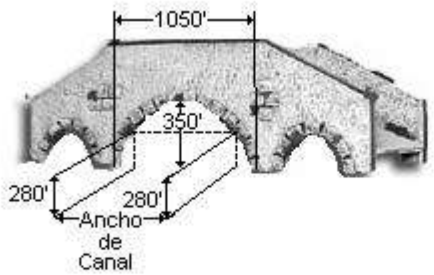
MISION IMPOSIBLE: CONSTRUCCIÓN DE UN PUENTE SOBRE EL RIO ORIENTE

Su equipo esta trabajando para las autoridades del transporte de la ciudad de Nueva York. Usted tiene que analizar dos proyectos de construcción para un nuevo puente sobre el Río Oriente en dicha ciudad. El espacio entre los soportes del puente necesita ser de 1050 pies y la altura en el centro del arco de 350 pies. Una compañía ha sugerido que la estructura tenga la forma de una parábola; otra compañía sugiere una semielipse. El equipo de ingeniería determinara las residencias relativas de las dos proyectos; el trabajo de usted es encontrar si existe alguna diferencia en los anchos del canal.

Un buque petrolero vacío necesita un espacio libre de 280 pies para pasar por debajo del puente.

Usted debe encontrar la anchura del canal en cada una de las dos propuestas.





Para determinar la ecuación de una parábola con estas características, primero coloque la parábola sobre los ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.

¿Cuál es la ecuación de la parábola? (si usa punto decimal en la ecuación aproxime hasta seis decimales. Si usa fracciones su respuesta será más exacta.)

Si la forma de los soportes es parabólica, ¿Qué tan ancho será el canal por el que pasara el buque petrolero?

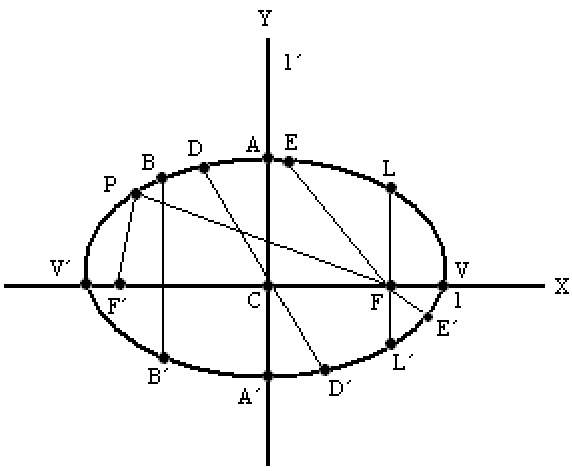
para determinar la ecuación de una semielipse con estas características, coloque la semielipse sobre ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.

¿Cuál será la ecuación de la elipse? ¿Qué tan ancho deberá ser el canal por el que pasara el buque petrolero?

Ahora que sabe cual de las dos alternativas proporciona el canal mas ancho, considere otros factores. Su departamento también esta encargado de verificar la profundidad del canal, la cantidad de tráfico en el río y otros detalles. Por ejemplo, si hubiera una inundación en el río y el nivel del agua se elevara 10 pies, ¿Cómo se afectara el espacio libre? Tome una decisión acerca de cual proyecto piensa que seria mejor por lo que a su departamento concierne y explique su decisión.

LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de un punto P (x, y) que se mueve en un plano de tal forma que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es igual a una constante.



➢ ELEMENTOS DE UNA ELIPSE

Con referencia a la figura anterior pueden observarse los elementos de la elipse:

F,F´	Focos de la elipse
1	Eje focal
V, V´	Vértices
VV´	Eje mayor
C	Centro
1´	Eje normal
AA´	Eje menor
BB´	Cuerda
EE´	Cuerda focal
LL´	Lado recto

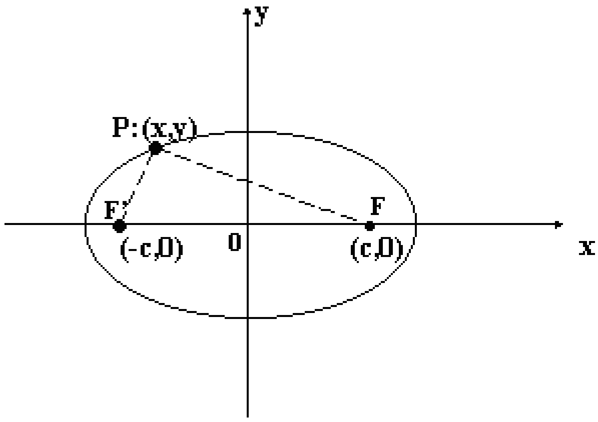
Cuando la elipse cuenta con dos focos también tiene dos lados rectos.

ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE X

TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(-c, 0) y F(c, 0), eje mayor 2a, y eje menor 2b, (fig.3.) viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$$



Demostración

Si p(x, y) es un punto que pertenece a la elipse considerada, se tiene de acuerdo a la definición **i** que $\overline{FP}+\overline{F'P}=2a,$ o equivalentemente, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ (fórmula de distancia entre dos puntos).

Transponiendo el primer radical al segundo lado y elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

Simplificando la última igualdad se llega

a: $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$

Al elevar nuevamente ambos miembros al cuadrado en la última ecuación, se obtiene:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

La cual se reduce a:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2)$$

Recordando además que $a^2-c^2=b^2$ y al dividir ambos miembros de la última igualdad por a^2b^2, se obtiene finalmente $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: que corresponde a la ecuación pedida.

ECUACION DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE Y

TEOREMA:

La ecuación de la elipse con focos en los puntos F'(0, -c) y F(0, c), eje mayor 2a, y, eje menor 2b (fig. 6.), viene dada por:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (2)$$

Demostración:

Es similar a la anterior, se deja por lo tanto como ejercicio.

NOTA:

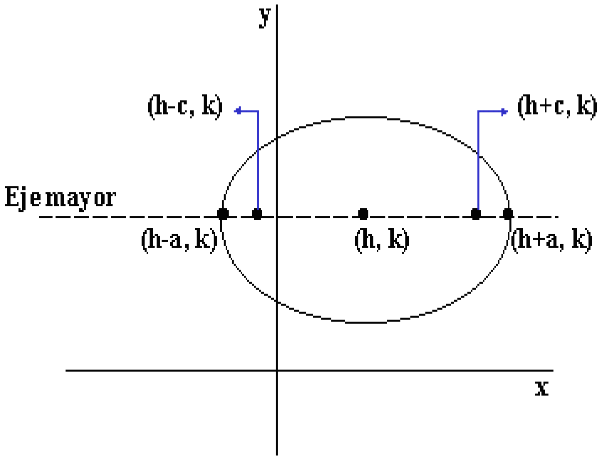
Nótese que si en las ecuaciones (1) y (2) de la elipse, se hace a = b, las ecuaciones se transforman en la ecuación de una circunferencia de centro en el origen y radio a.

Caso 3. (Caso General).

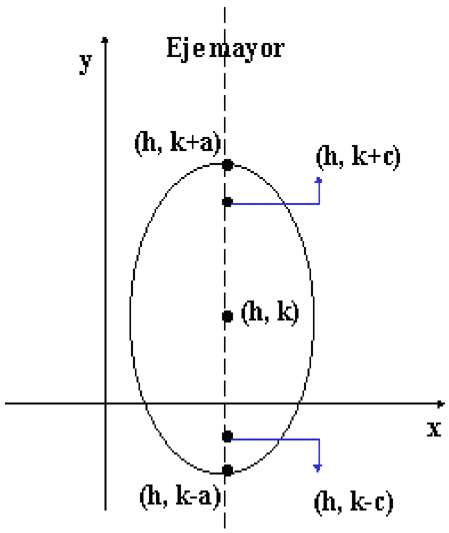
Si en vez de considerar el centro de la elipse en el punto (0, 0), como se hizo en los dos casos anteriores, se considera el punto C (h, k), la ecuación de la elipse correspondiente, se transforma utilizando las ecuaciones de traslación (sección 6.1.2.) en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

Si a > b, el eje focal es paralelo al eje x. (sobre la recta y = k)
Si b > a, el eje focal es paralelo al eje y. (sobre la recta x = h)



(a) $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}$



(b) $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}$

Observaciones:

i. La ecuación (3) se deduce considerando que los ejes de la elipse son paralelos a los ejes coordenados.

ii. Si a > b, la ecuación (3) corresponde a una elipse con centro en C(h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje x (fig. a).

Si b > a, la ecuación (3) corresponde a una elipse con centro en C(h, k) y cuyo eje focal es paralelo al eje y (fig. b).

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (4,0), (-4,0) y cuyos focos son los puntos (3,0), (-3,0)

Solución:

$$\frac{x}{16}+\frac{y}{7}=1$$

2.- Hallar la ecuación de la elipse a partir de los datos siguientes:

Focos (3, 8) y (3, 2), longitud del eje mayor=10

Solución:

$25x^2+16y^2-150x-160y+225=0$

3.- Los vértices de una elipse son los puntos (1, -6) y (9, -6) y la longitud del lado recto es 9/2. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos.

Solución:

$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$ y focos (5+ $\sqrt{7}$,-6), (5- $\sqrt{7}$,-6).

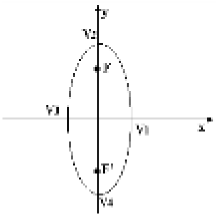
4.- Halle la ecuación de la elipse que tiene su centro en (0, 0) y cuyos focos son los puntos F (3, 0) y F' (-3, 0), además el intercepto de la gráfica con el eje x es el punto (5, 0).

Solución:

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

5.- Trazar la elipse cuya ecuación viene dada por: $25x^2 + 4y^2 = 100$

Solución:



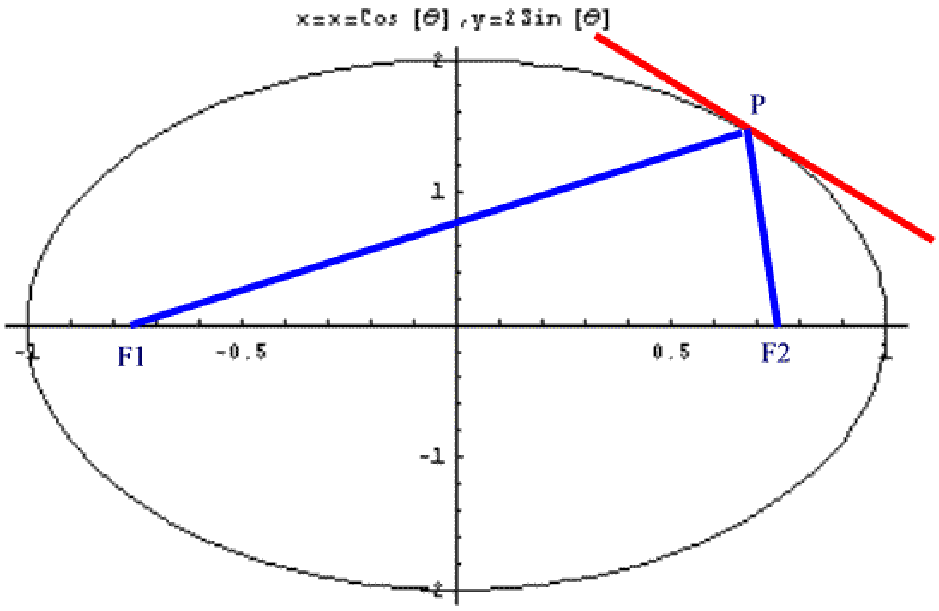
6.- Determine el centro, los vértices, los focos y dibujar la elipse que tiene por ecuación: $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$

Solución:

$$\frac{(x-2)^2}{1^2}+\frac{(y+1)^2}{2^2}=1$$

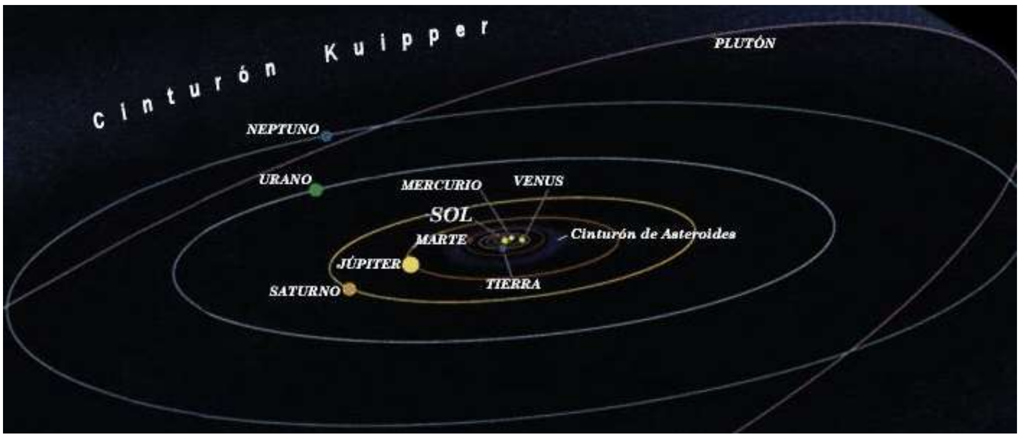
APLICACIONES

La elipse tiene una propiedad muy interesante: Si unimos cualquier punto, P, de la elipse con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto son iguales.



Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.

Las elipses se encuentran en muchas aplicaciones de ciencia e ingeniería. Por ejemplo, las orbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con el sol en uno de los focos.



Muchos puentes de piedra o concreto tienen forma semielípticos.

Cuando en mecánica se necesita una velocidad variable de movimiento se utilizan dispositivos elípticos.

Las elipses también tienen una propiedad interesante de reflexión. Si una fuente de luz (o sonido) es colocada en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejaran en la elipse y se concentrara en el otro foco. Este concepto es la base principal de "las galerías de murmullos", las cuales son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo son reflejadas hacia ese lugar.

GALERIAS DE MURMULLOS

La figura muestra las especificaciones de un techo elíptico en un salón diseñado como galería de murmullos. En una galería de murmullos, una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada por otra persona parada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo desde uno de los focos son reflejadas al otro foco. ¿Dónde están ubicados los focos en este salón?

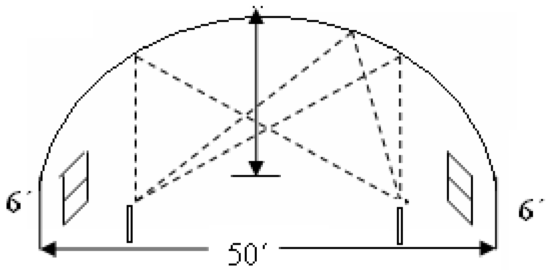


figura 11

<u>Solución:</u>

Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor quede a lo largo del eje x. Véase la figura siguiente. La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde *a=25* y *b=20*. Como

$$c^2=a^2-b^2=25^2-20^2=625-400=225$$

Tenemos c=15. Así los focos están ubicados a 15 pies desde el centro de la elipse a lo largo del eje mayor.

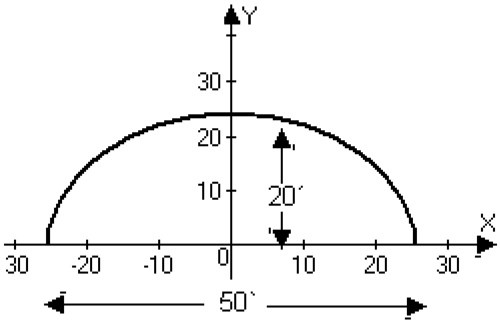
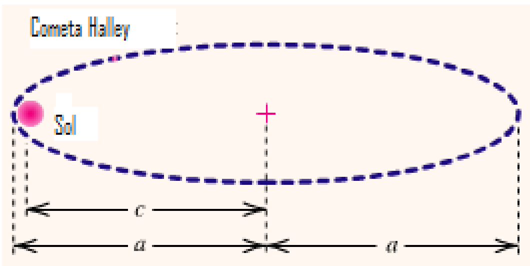


Figura 12

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a=25, b=20$$

→ Cálculo de una distancia en una trayectoria elíptica

El cometa Halley tiene una órbita elíptica con excentricidad e= 0.967. La distancia más pequeña a la que el cometa Halley pasa por el Sol es 0.587 UA. Calcula la máxima distancia del cometa al Sol, hasta la décima de UA más próxima.



Como $a-c$ es la distancia mínima entre el Sol y el Cometa, tenemos (en UA):

$a-c=0.587$, o bien $a=c+0.587$

Como $e=\frac{c}{a}=0.967$, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
c &= 0.967a \\
c &= 0.967\left(c+0.587\right) \\
c &= 0.967c+0.568 \\
c-0.967c &= 0.568 \\
c\left(1-0.967\right) &= 0.568 \\
c &= \frac{0.568}{0.033} \\
c &= 17.2
\end{aligned}
$$

Como $a = c + 0.587$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
a &= 17.2 + 0.587 \\
a &\approx 17.8
\end{aligned}
$$

y la distancia máxima entre el Sol y el cometa es

$$
\begin{aligned}
a+c &= 17.8+17.2 \\
a+c &= 35.0\ UA
\end{aligned}
$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Arco semieliptico de un puente: Un arco tiene forma de la mitad superior de una elipse y es usado para sostener un puente que debe atravesar un río de 20 metros de ancho. En el centro el arco mide 6 metros desde el centro del río (véase la figura 13). Escriba una ecuación para la elipse en la que el eje x coincida con el nivel del agua y el eje y pase por el centro del arco.

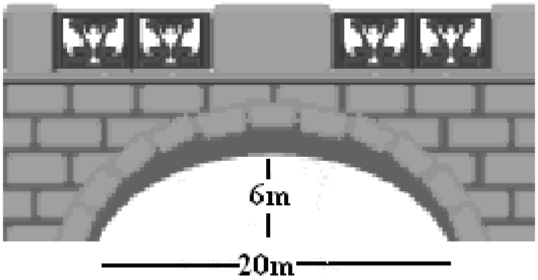


figura 13

Solución:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

Arco semieliptico de un puente: Un puente esta construido en forma de arco semieliptico. Tiene extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a distancias de 10, 20, 30 y 50 pies desde el centro.

Solución:

24.65 pies, 21.65 pies, 13.82 pies

En los problemas siguientes utilice el hecho de que las orbitas de un planeta forman una elipse alrededor del Sol. Con el Sol en uno de los focos. El afelio de un planeta es su distancia mayor al Sol y el perihelio su distancia menor. La distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la orbita elíptica. Véase la ilustración.

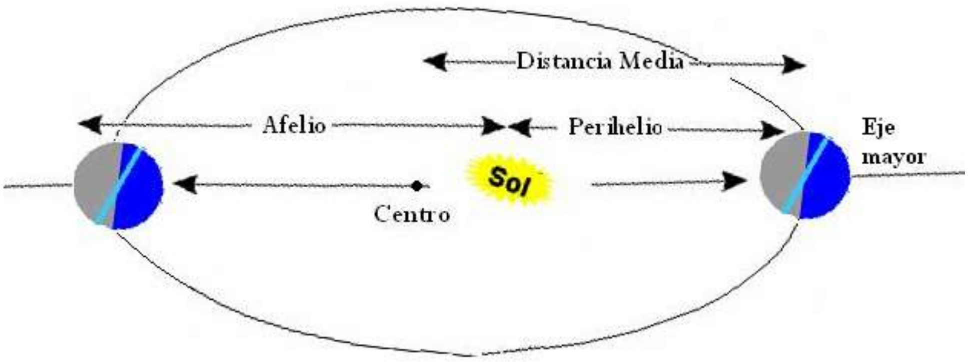


Figura 14

La tierra. La distancia media de la tierra al Sol es de 93 millones de millas. Si el afelio de la Tierra es de 94.5 millones de millas, ¿Cuál es su perihelio? escriba una ecuación para la orbita de la Tierra alrededor del sol.

Solución:

91.5 millones de millas; $\frac{x^2}{(93)^2}+\frac{y^2}{8646.75}=1$

Júpiter. El afelio de Júpiter es de 507 millones de millas. Si la distancia del Sol al centro de la orbita elíptica jupiteriana es de 23.2 millones de millas, ¿Cuál es el perihelio? ¿Cual es la distancia media? Escriba una ecuación para la orbita de Júpiter alrededor del Sol.

Solución:

Perihelio: 460.6 millones de millas; distancia media: 483.8 millones de millas; $\frac{x^2}{(483.8)^2}+\frac{y^2}{233524}=1$

Consulte la figura siguiente. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse, 100 pies de largo y 50 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies desde un extremo?

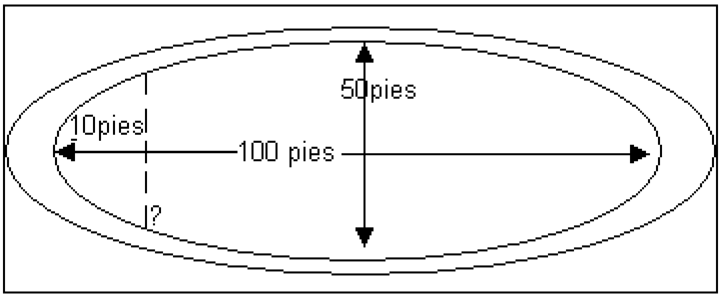


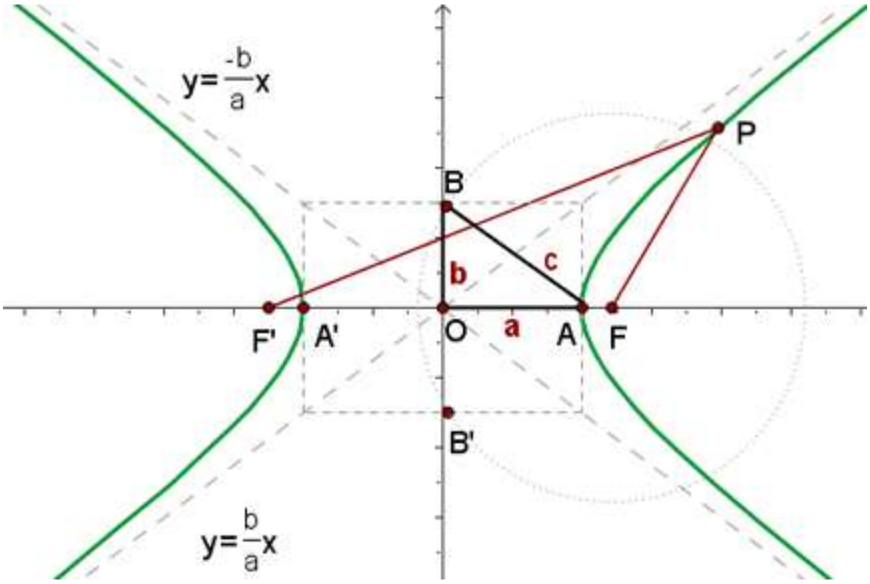
Figura 15

<u>Solución:</u>

30 pies

LA HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a una constante positiva igual a la distancia entre los vértices.



ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

F, F´	Focos de la hipérbola
A, A´	Vértices
O	Centro
Eje X	Eje focal
Eje Y	Eje Normal
$\overrightarrow{AA'}$	Eje transverso
$\overrightarrow{BB'}$	Eje conjugado

→ **Excentricidad:** $e=\frac{c}{a}$

ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

→ Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje X:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

→ Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje Y:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

→ Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

→ Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (h,k) y eje focal al eje Y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

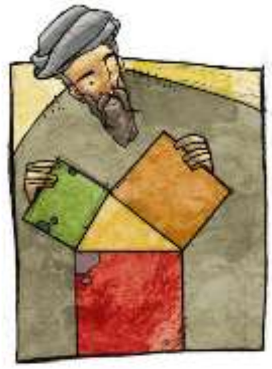
Las directrices de las hipérbolas se determinan mediante las siguientes fórmulas:

Tipo de Hipérbola	**Directrices**
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$x=\pm\frac{a}{e}$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y=\pm\frac{a}{e}$

Ejemplo:

1.- Los vértices de una hipérbola son los puntos $A(2,0)$ y $A'(-2,0)$, y sus focos los puntos $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

Solución: La Hipérbola es del tipo: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con centro en el origen y eje focal en el eje X.



a=2, c=3

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Ecuación buscada: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

$e=\frac{c}{a} \rightarrow e=\frac{3}{2}$

2.- Hallar la excentricidad y las directrices de la Hipérbola cuya ecuación es: $16x^2-25y^2=400$.

Solución: Pasamos la ecuación a la forma canónica:

$$\frac{16x^2}{400}-\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}$$

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

La hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

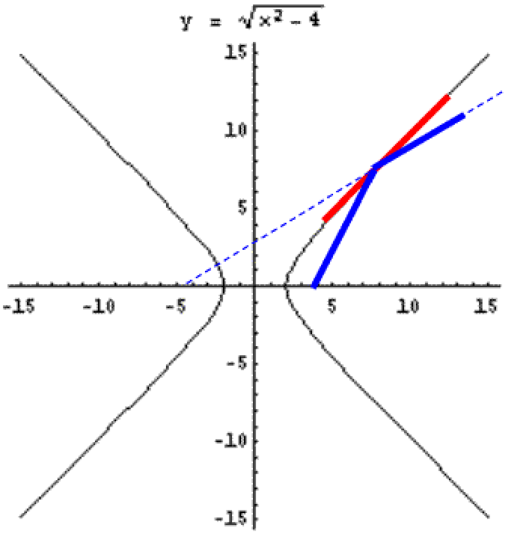
a=5, b=4, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ → $e=\frac{\sqrt{41}}{5}$

Directrices: $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{5}{\left(\frac{\sqrt{41}}{5}\right)}=\pm\frac{25}{\sqrt{41}}=\pm\frac{25\sqrt{41}}{41}$

APLICACIONES

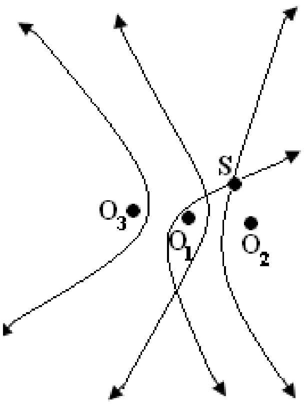
La hipérbola tiene una propiedad interesante: Si unimos cualquier punto, P, de la hipérbola con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto, son iguales. (También se puede decir que la tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios focales).



Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja en la dirección de la recta que une el otro foco con el punto.

Ejemplo:

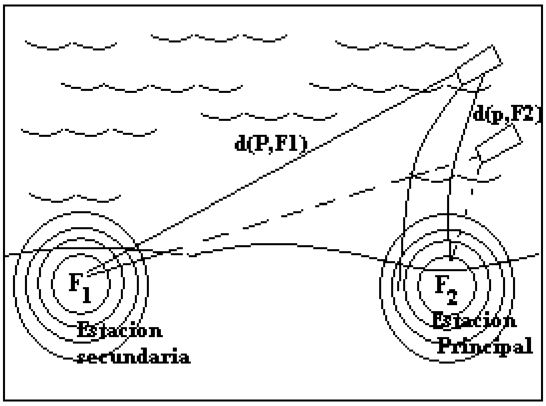
→ Suponga que un arma es disparada desde un origen desconocido S. Un observador en 0_1 escucha la detonación (sonido del disparo) un segundo después que otro observador en 0_2. Puesto que el sonido viaja a cerca de 1110 pies por segundo, se concluye que el punto S debe estar 1100 pies más cerca de 0_2 que de 0_1. Así, S esta en una rama de una hipérbola con focos en 0_1 y 0_2 (¿advierte por que? Por que la diferencia de la distancia de S a 0_1 y de S a 0_2 es la constante de 1100). Si un tercer observador es 0_3 escucha la misma detonación 2 segundos después que 0_1 entonces S estará una rama de una segunda hipérbola con focos en 0_1 y 0_3. La intersección de las dos hipérbolas señalara con presición la ubicación de S.



LORAN:

En el sistema de navegación de largo alcance (LORAN, por sus siglas en ingles),una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar (véase la figura) Aunque un barco recibe siempre las dos señales, por lo regular se halla mas cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se reduce a una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue a una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados

en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se tiene como resultado una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.



$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = constante$$

LORAN

Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las señales

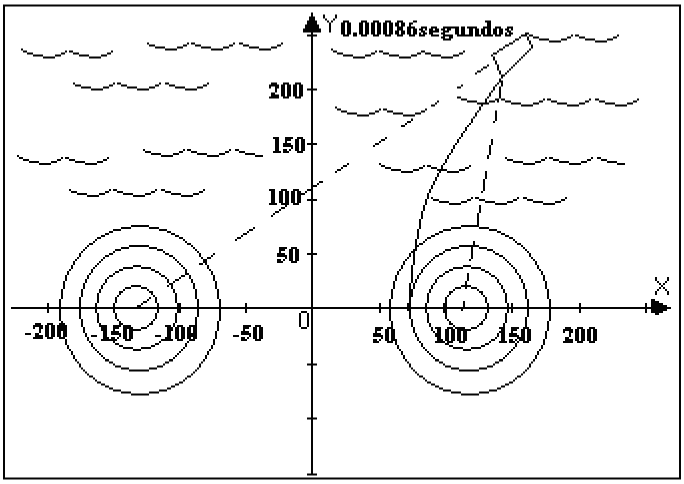
LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar donde el barco alcanzara la costa si continua sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b)Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas desde la estación principal, ¿Qué diferencia de tiempo debe observar?

(c)Si el barco esta a 80 millas de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada ¿Cuál es su ubicación exacta? [Nota: La velocidad de cada señal de radio es de 186,000 millas por segundo.]

Solución:

(a) Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que las dos estaciones estén en el eje x y el origen a la mitad del camino entre ellas.



El barco esta en una hipérbola cuyos focos son las dos estaciones de radio. La razón para esto es la diferencia de tiempo constante de las señales desde cada estación tiene como resultado una diferencia constante en la distancia del barco a cada una de las estaciones. Como la diferencia de tiempo son 0.00086 segundos y la velocidad de la señal es de 186,000 millas por segundo, la diferencia en las distancias del barco a cada estación (focos) es

Distancia=Velocidad X Tiempo=186,000 X 0.00086=160 millas

La diferencia entre las distancias desde el barco a cada estación, 160, es igual a 2a, así que *a=80* y el vértice de la hipérbola correspondiente esta en (80,0).

Como el foco esta en (125,0)al seguir sobre esta hipérbola el barco alcanzara la costa a 45 millas de la estación principal.

(b)Para alcanzar la costa a 25 millas de la estación principal, el barco debe seguir una hipérbola con el vértice en (100,0). Para esta hipérbola a=100, de modo que la diferencia constante entre las distancias del arco a cada estación es de 200 millas. La diferencia de tiempo que el barco debe observar es:

$$Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad} = \frac{200}{186{,}000} = 0.001075 segundos$$

(c)Para encontrar la ubicación exacta del barco, necesitamos determinar la ecuación de la hipérbola con vértice en (100,0) y foco en (125,0). La forma de la ecuación de esta hipérbola es:

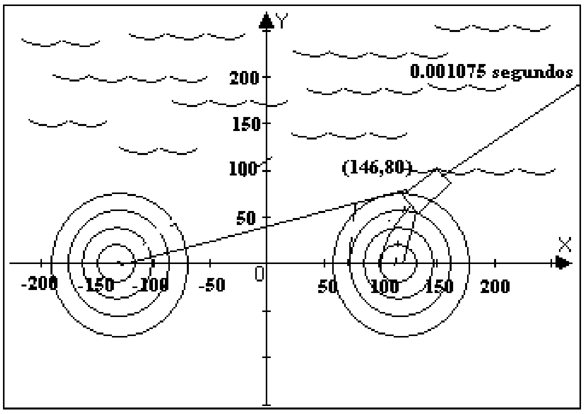
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde *a=100*. Como *c=125*, tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 125^2 - 100^2 = 5625$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{5625} = 1$$



Ya que el barco esta a 80 millas de la costa, usamos *y=80* en la ecuación y resolvemos para x.

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{80^2}{5625} = 1$$

$$\frac{x^2}{100^2} = 1 + \frac{80^2}{5625} = 2.14$$

$$x^2 = 100^2(2.14) \rightarrow x = 146$$

El barco esta en la posición (146, 80).

Ejercicios Propuestos

1.- Encontrar una ecuación de una hipérbola con centro en el origen, un foco en (3,0) y un vértice en (-2,0). Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

En los ejercicios 2 al 9 encontrar una ecuación para la hipérbola descrita. Trace la gráfica de la ecuación:

2.- Centro en (0,0); foco en (3,0); vértice en (1,0).

Solución: $x^2-\frac{y^2}{8}=1$

3.- Centro en (0,0); foco en (0,-6); vértice en (0,4).

Solución: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$

4.- Foco en (-5,0) y (5,0); vértice en (3,0).

Solución: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

5.- Vértices en (0,-6) y (0,6); asíntota la recta $y=2x$.

Solución: $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{9}=1$

6.- Centro en (4,-1); foco en (7,-1); vértice en (6,-1).

Solución: $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{5}=1$

7.- Centro en (-3,-4); foco en (-3,-8); vértice en (-3,-2).

Solución: $\frac{(y+4)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{12}=1$

8.- Focos en (3,7) y (7,7); vértice en (6,7).

Solución: $(x-5)^2-\frac{(y-7)^2}{3}=1$

9.- Vértices en (-1,-1) y (3,-1); asíntota de la recta $\frac{(x-1)}{2}=\frac{(y+1)}{3}$

Solución: $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

10.- **LORAN.** Dos estaciones LORAN están separadas 200 millas a lo largo de una costa recta.

(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00038 segundos entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares para determinar donde alcanzará el barco la costa si sigue la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

Solución: El barco alcanzará la costa en un punto 64.66 millas desde la estación maestra.

(b) Si el barco quiere entrar al puerto localizado entre las dos estaciones a 20 millas de la estación central, ¿qué diferencia de tiempo está buscando?

Solución: 0.00086 segundos.

(c) Si el barco se encuentra a 50 millas mar adentro al obtener la diferencia de tiempo deseada, ¿Cuál es la ubicación exacta del barco? [Nota: La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo].

Solución: (104,50).

11.- **Calibración de instrumentos.** En una prueba aplicada a sus instrumentos de registro, un equipo de sismólogos colocó dos de los dispositivos separados una distancia de 2000 pies, con el dispositivo A al oeste del dispositivo B. En un punto entre los dos instrumentos y a 200 pies del punto B, se detonó una pequeña cantidad de explosivos y se tomó nota del tiempo en que el sonido llegó a cada dispositivo. Se realizó una segunda explosión en un punto directamente al norte del punto B.

(a) ¿A qué distancia al norte debe estar el sitio de la segunda explosión de modo que la diferencia del tiempo registrado por los dispositivos para la segunda detonación sea la misma que la registrada para la primera detonación?

Solución: 450 pies.

(b) Explique por qué este experimento puede ser utilizado para calibrar los instrumentos.

Referencias Bibliograficas

Swokowski, Cole, ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRIA ANALITICA. Cengeage Learnig. Undécima edición.

Sullivan. PRECALCULO. Prentice Hall. Cuarta edición.

FÍSICA.

Ingeniería Industrial.

Ingeniería Electromecánica.

Ingeniería Electrónica.

Ingeniería en Gestión Empresarial.

Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Ingeniería Mecatrónica.

Ingeniería Bioquímica.

Ingeniería en Materiales.

Ingeniería en Informática.

Ingeniería en Logística.

Ingeniería Aeronáutica.

Ingeniería Química.

Licenciatura en Biología.

Cuadernillo de Teoría y Problemas

ELABORÓ: ING GERARDO FRANCO PASOHONDO.

1. CONTENIDO

2. PRESENTACIÓN DE LA ASIGNATURA

La presente guía tiene por objetivo recordar y sentar las bases sobre el conocimiento de Física, que requiere todo estudiante de ingeniería que requiere emplearla para la solución de problemas.

Durante el desarrollo del curso se retomarán los temas básicos de Física de manera que el alumno pueda tener un dominio apropiado de ella para su mejor desempeño durante su vida escolar.
Se requieren conocimientos de las materias previamente estudiadas en el nivel medio y medio superior, de esta manera el curso tiene como finalidad el fortalecer dichos conocimientos.

Al cursar esta materia, el estudiante desarrollará la capacidad para comprender los conceptos fundamentales de Física. La orientación del programa se enmarca en la formación de los alumnos con un enfoque de aprendizaje significativo, trabajando de manera colaborativa para lograrlo. Además desarrollará un pensamiento lógico matemático formativo que le permite analizar fenómenos reales de manera estructurada y modelarlos.

3. DATOS DE UBICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Clave y nombre de la asignatura: Física

Prerrequisitos: Ninguno

Materia subsiguiente: Física I

Horas presénciales a la semana: 6 horas

Semestre en la retícula: Semestre cero (6 semanas)

4. CRITERIOS DEL DESARROLLO DEL PROGRAMA

Contenido de las evaluaciones

Se abarcarán a fin de evaluar los temas de la siguiente manera:

Física

Semana	I 14-18 junio	II 21-25 junio	III 28 junio – 2 julio	IV 5julio- 9 julio	V 12 julio- 16 julio	VI 19 julio- 23 julio
Temas	Tema 1 2.1	Continuación 2.1 3.1	3. 2 3.3	3.4 4.1	4.2 4.3	4.3 Tema 5

5. OBJETIVO GENERAL DEL PROGRAMA

El alumno reforzará los conocimientos fundamentales de Física necesarios para su preparación profesional. Desarrollará el pensamiento abstracto y analítico.

6. PLANEACIÓN Y PLAN DE CLASE

#	Temas	Subtemas	Hrs.
I	Magnitudes	1. Sistema Internacional de Unidades. 2. Conversión de unidades.	4
II	Vectores	1. Suma de vectores.	4
III	Cinemática	1. M.R.U. 2. Caída libre y tiro vertical. 3. Movimiento en dos dimensiones.	12
IV	Dinámica	1. Leyes de Newton. 2. Diagramas de cuerpo libre..	12
V	Trabajo y energía	1. Energía cinética. 2. Trabajo mecánico y potencia. 3. Energía potencial.	4

7. BIBLIOGRAFÍA

Básica:

1. Tippens. Física, Conceptos y Aplicaciones, 6ª. Edición, México: Ed. McGraw Hill, 2004.

2. Sears, Francis W. [et.al], Física Universitaria: Volumen II, México: Pearson Educación de México, 2004.

3. Jones y Childers, Física Contemporánea, 3º Edición, México: Ed. McGraw Hill, 2001.

4. Pérez Montiel Héctor. Física General. 2ª. Edición, México: Publicaciones Culturales, 2004.

5. Paul, G, Hewitt. Física Conceptual. Ed. Pearson. 9ª. Edición, México, 2004

Complementaria:

1. Hollidey, Resnick, Walter. Fundamentos de Física II. 6ª. Edición, México: Ed. CECSA. 2002.

2. Raymond, A. Serway y John W. Jewett, Jr. Física. 3ª edición, México: Ed. Thomson, 2004.

3. Susan M. Lea y John Robert Burke. Física II. Editorial Internacional. Thomson Editores, 1999.

CAPÍTULO I

Unidades y medición

Para las ciencias experimentales como la Física, la medición constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles. Las unidades como cantidades de referencia para efectos de medición, son el resultado de esas mediciones.

La medición es una operación que permite atribuir una propiedad o característica física de manera numérica. La noción de magnitud está relacionada con el concepto de medida, se denominan magnitudes a ciertas propiedades o aspectos que pueden ser observables de manera numérica.

En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada. Una cantidad de referencia se denomina unidad y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.
La medida de una magnitud física supone la comparación de un objeto con otro de la misma naturaleza o patrón.
Un sistema de unidades es un conjunto reducido de ellas de tal manera que cualquier otra magnitud pueda ser expresada en función de ellas.
Esas pocas magnitudes se denominan básicas, en tanto las otras que se expresan en función de ellas se denominan unidades derivadas.
La definición de unidades dentro de un sistema se atiene a diferentes criterios, de manera que la unidad de referencia ha de ser constante al ser referente para el sistema.

1.1 Sistema Internacional de Unidades

Las condiciones de definición de un sistema de unidades permitirían establecer una amplia variedad de ellos o incluso, aun con el mismo conjunto de unidades básicas, elegir y definir unidades distintas de un sistema a otro.

Desde un punto de vista formal, cada quien podría operar con su propio sistema de unidades, sin embargo, y aunque en el pasado tal situación se ha dado con cierta frecuencia, existe una tendencia generalizada a adoptar un mismo sistema de unidades con el fin de facilitar la cooperación y comunicación en el terreno científico y técnico.

El Sistema Internacional de Unidades (abreviadamente SI) distingue y establece además de las magnitudes básicas y de las derivadas, un tercer tipo formado por aquellas que aún no están incluidas en ninguno de los dos anteriores, son denominadas magnitudes suplementarias.
El SI toma como unidades fundamentales la longitud, la masa, el tiempo, la intensidad de corriente eléctrica, la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de sustancia y fija las demás unidades en función de cada una de ellas.
La definición de las unidades ha evolucionado con el tiempo y al mismo ritmo de las propias ciencias físicas.

Unidades fundamentales

Unidad de longitud.- El metro es la longitud de trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de 1/299 792 458 de segundo.

Unidad de masa.- El kilogramo (kg) es igual a la masa del prototipo internacional del platino iridiado que se conserva en la Oficina de Pesos y Medidas de París.

Unidad de tiempo.- El segundo (s) es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

Unidad de intensidad de corriente eléctrica.- El ampere (A) es la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produciría una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud.

Unidad de temperatura termodinámica.- El kelvin (K) es la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

Unidad de cantidad de sustancia.- El mol (mol) es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12.

Unidad de intensidad luminosa.- La candela (cd) es la unidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hertz y cuya intensidad energética en dicha dirección es 1/683 watt por estereorradián.

Unidades derivadas

Las unidades SI derivadas se definen de forma que sean coherentes con las unidades básicas y suplementarias, es decir, se definen por expresiones algebraicas bajo la forma de productos de potencias de las unidades SI básicas y/o suplementarias con un factor numérico igual 1.Varias de estas unidades SI derivadas se expresan simplemente a partir de las unidades SI básicas y suplementarias. Otras han recibido un nombre especial y un símbolo particular.

Unidad de velocidad.- Un metro por segundo (m/s o $m\cdot s^{-1}$) es la velocidad de un cuerpo que, con movimiento uniforme, recorre, una longitud de un metro en 1 segundo

Unidad de aceleración.- Un metro por segundo cuadrado (m/s^2 o $m\cdot s^{-2}$) es la aceleración de un cuerpo, animado de movimiento uniformemente variado, cuya velocidad varía cada segundo, 1 m/s.

Unidad de número de ondas.-Un metro a la potencia menos uno (m^{-1}) es el número de ondas de una radiación monocromática cuya longitud de onda es igual a 1 metro.

Unidad de velocidad angular.- Un radián por segundo (rad/s o $rad\cdot s^{-1}$) es la velocidad de un cuerpo que, con una rotación uniforme alrededor de un eje fijo, gira en 1 segundo, 1 radián.

Un pascal (Pa) es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.

Unidad de energía, trabajo, cantidad de calor.- Un joule (J) es el trabajo producido por una fuerza de 1 newton, cuyo punto de aplicación se desplaza 1 metro en la dirección de la fuerza.

Unidad de potencia, flujo radiante.- Un watt (W) es la potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo

Unidad de cantidad de electricidad, carga eléctrica.- Un coulomb (C) es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de intensidad 1 ampere.

Unidad de potencial eléctrico, fuerza electromotriz.- Un volt (V) es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre estos puntos es igual a 1 watt.

Unidad de resistencia eléctrica.- Un ohm (Ω) es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.

Unidad de capacidad eléctrica.- Un farad (F) es la capacidad de un condensador eléctrico que entre sus armaduras aparece una diferencia de potencial eléctrico de 1 volt, cuando está cargado con una cantidad de electricidad igual a 1 coulomb.

Unidad de flujo magnético.- Un weber (Wb) es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en un segundo por decaimiento uniforme.

Unidad de inducción magnética.- Una tesla (T) es la inducción magnética uniforme que, repartida normalmente sobre una superficie de 1 metro cuadrado, produce a través de esta superficie un flujo magnético total de 1 weber.

Unidad de inductancia.- Un henry (H) es la inductancia eléctrica de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt, cuando la corriente eléctrica que recorre el circuito varía uniformemente a razón de un ampere por segundo.

Múltiplos y submúltiplos decimales

Como algunas magnitudes son relativamente grandes en comparación con las otras, se emplea el manejo de múltiplos y submúltiplos decimales para las unidades ,y son:

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
deci	*d*	10^{-1}	*Deca*	*Da*	10^{1}
centi	*c*	10^{-2}	*Hecto*	*H*	10^{2}
mili	*m*	10^{-3}	*Kilo*	*K*	10^{3}
micro	μ	10^{-6}	*Mega*	*M*	10^{6}
nano	*n*	10^{-9}	*Giga*	*G*	10^{9}
pico	*p*	10^{-12}	*Tera*	*T*	10^{12}
femto	*f*	10^{-15}	*Peta*	*P*	10^{15}
atto	*a*	10^{-18}	*Exa*	*E*	10^{18}
zepto	*z*	10^{-21}	*Zepto*	*Z*	10^{21}
yocto	*y*	10^{-24}	*Yocto*	*Y*	10^{24}

Los símbolos de las unidades del Sistema Internacional, con raras excepciones como el caso del ohm (Ω), se expresan en caracteres romanos, en general, con minúsculas; sin embargo, si dichos símbolos corresponden a unidades derivadas de nombres propios, su letra inicial es mayúscula. Ejemplo, A de ampere, J de joule. Los símbolos no van seguidos de punto, ni toman la s para el plural. Por ejemplo, se escribe 5 kg, no 5 kgs .

Cuando el símbolo de un múltiplo o de un submúltiplo de una unidad lleva exponente, ésta afecta no solamente a la parte del símbolo que designa la unidad, sino al conjunto del símbolo. Por ejemplo, km^2 significa $(km)^2$, área de un cuadrado que tiene un km de lado, o sea 10^6 metros cuadrados y nunca $k(m^2)$, lo que correspondería a 1000 metros cuadrados. El símbolo de la unidad sigue al símbolo del prefijo, sin espacio. Por ejemplo, cm, mm, etc. El producto de los símbolos de de dos o más unidades se indica con preferencia por medio de un punto, como símbolo de multiplicación. Por ejemplo, newton-metro se puede escribir N·m Nm, nunca mN, que significa milinewton.

Cuando una unidad derivada sea el cociente de otras dos, se puede utilizar la barra oblicua (/), la barra horizontal o bien potencias negativas, para evitar el denominador. No se debe introducir en una misma línea más de una barra oblicua, a menos que se añadan paréntesis, a fin de evitar toda ambigüedad. En los casos complejos pueden utilizarse paréntesis o potencias negativas; por ejemplo, m/s^2 o bien $m \cdot s^{-2}$ pero no m/s/s. $(Pa \cdot s)/(kg/m^3)$ pero no $Pa \cdot s/kg/m^3$.

Los nombres de las unidades debidos a nombres propios de científicos deben de escribirse con idéntica ortografía que el nombre de éstos, pero con minúscula inicial. No obstante, serán igualmente aceptables sus denominaciones castellanizadas de uso habitual, siempre que estén reconocidas por la Real Academia de la Lengua. Se tienen como ejemplo: amperio, voltio, faradio, culombio, julio, ohmio, voltio, watio, weberio. Los nombres de las unidades toman una s en el plural (ejemplo 10 newtons) excepto las que terminan en s, x ó z.

Cuando se escribe un número la coma se utiliza para separar la parte entera de la decimal. Para facilitar la lectura, los números pueden estar divididos en grupos de tres cifras (a partir de la coma, si hay alguna) estos grupos no se separan por puntos ni comas.

1.2 Conversión de unidades

Debido a que hasta el momento se el sistema Internacional no es el único es conveniente realizar conversiones de unidades entre ellos, para realizar una conversión se cancelan las unidades a eliminar al multiplicarlas por un factor de conversión.

1.3 Ejercicios de conversiones

1) 5 Kg a

a) oz b) lb_m c) ton met

$$\text{a) } 5\text{ kg}\left(\frac{35.27392oz}{1\,kg}\right)=176{,}3696\ oz$$

$$\text{b) } 5\text{ kg}\left(\frac{1\ \mathrm{lb}_m}{0.453593kg}\right)=11{,}0231\ \mathrm{lb}_m$$

$$\text{c) } 5\text{ kg}\left(\frac{.001\text{ ton met}}{1\,kg}\right)=5\times10^{-3}\ ton\ met$$

2) 4.5 lb a:

a) oz b) kg c) ton met

$$\text{a) } 4.5\ \mathrm{lb}_m\left(\frac{16oz}{1\ \mathrm{lb}_m}\right)=72\ oz$$

$$\text{b) } 4.5\ \mathrm{lb}_m\left(\frac{.453593\text{ kg}}{1\ \mathrm{lb}_m}\right)=2.0412\ kg$$

$$\text{c) } 4.5\ \mathrm{lb}_m\left(\frac{5\times10^{-4}\text{ton met}}{1\ \mathrm{lb}_m}\right)=22{,}5\times10^{-4}\text{ton met}$$

3) 22.3 m a :

a) ft b) in c) yd d) $\overset{0}{\mathrm{A}}$

$$\text{a) } 22.3\text{ m}\left(\frac{3.2808\text{ ft}}{1\,m}\right)=73{,}1618\ ft$$

$$\text{b) } 22.3\text{ m}\left(\frac{39.37\text{ in}}{1\,m}\right)=877{,}9510\ in$$

$$\text{c) } 22.3\text{ m}\left(\frac{1.0936\text{ yd}}{1\,m}\right)=24{,}3873\ yd$$

$$\text{d) } 22.3\text{ m}\left(\frac{10^{10}\,\overset{0}{\mathrm{A}}}{1\,m}\right)=2{,}23\times10^{11}\,\overset{0}{A}$$

4) 28.9 ft a :

a) yd b) in c) mi d) m

$$\text{a) } 28.9 \text{ ft}\left(\frac{\frac{1}{3}\text{ yd}}{1 \text{ ft}}\right) = 9,633\ yd$$

$$\text{b) } 28.9 \text{ ft}\left(\frac{12 \text{ in}}{1 \text{ ft}}\right) = 346,8\ in$$

$$\text{c) } 28.9 \text{ ft}\left(\frac{0.0006214 \text{ mi}}{1.0936 \text{ ft}}\right) = 0,0164\ mi$$

$$\text{d) } 28.9 \text{ ft}\left(\frac{0.3048 \text{ m}}{1 \text{ ft}}\right) = 8,8087\ m$$

5) 2.97 m^3 a :

a) L b) ft^3 c) in^3

$$\text{a) } 2.97 \text{ m}^3\left(\frac{1000 \text{ L}}{1\text{m}^3}\right) = 2970\ L$$

$$\text{c) } 2.97 \text{ m}^3\left(\frac{35.145 \text{ ft}^3}{1\text{m}^3}\right) = 104,3807\ ft^3$$

$$\text{d) } 2.97 \text{ m}^3\left(\frac{1728 \text{ in}^3}{0.028317 \text{ m}^3}\right) = 181239,5381\ in^3$$

6) $125.8 \text{ lb}_\text{f}$ a :

a) N b) dinas

$$\text{a) } 125.8 \text{ lb}_\text{f}\left(\frac{1 \text{ N}}{0.22481 \text{ lb}_\text{f}}\right) = 559,5836 \text{ N}$$

$$\text{b) } 125.8 \text{ lb}_\text{f}\left(\frac{10^5 \text{ dinas}}{0.22481 \text{ lb}_\text{f}}\right) = 5,595836\times10^7\ dinas$$

7) $15\ \frac{m}{s}$ a :

a) $\frac{ft}{s}$ b) $\frac{km}{h}$ c) $\frac{in}{s}$

$$\text{a) } 15\ \tfrac{m}{s}\left(\frac{3,2808\, ft}{1m}\right) = 49,2120\ ft$$

$$\text{b) } 15\ \tfrac{m}{s}\left(\frac{1\ km}{1000\ m}\right)\left(\frac{60\ s}{1\ h}\right) = 0,9\tfrac{km}{h}$$

$$\text{c) } 15\ \tfrac{m}{s}\left(\frac{39,37\, ft}{1m}\right) = 590,55\tfrac{ft}{m}$$

8) $12 \frac{ft}{s^2}$ a :

a) $\frac{m}{s^2}$ b) $\frac{km}{s^2}$ c) $\frac{m}{h^2}$

a) $12 \frac{ft}{s^2}\left(\frac{0.3048\ m}{1\ ft}\right) = 3,6576 \frac{m}{s^2}$

b) $12 \frac{ft}{s^2}\left(\frac{0.3048\ m}{1\ ft}\right)\left(\frac{1\ km}{1000\ m}\right) = 0,0037 \frac{km}{s^2}$

c) $12 \frac{ft}{s^2}\left(\frac{0.3048\ m}{1\ ft}\right)\left[\left(\frac{60\ \mathrm{s}}{1\ h}\right)\right]^2 = 13167,36 \frac{m}{h^2}$

9) $23,3 \frac{g}{cm^3}$ a :

a) $\frac{kg}{m^3}$ b) $\frac{g}{L}$

a) $23,3 \frac{g}{cm^3}\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right)\left[\left(\frac{1000\ cm}{1\ m}\right)\right]^3 = 2,33\times 10^7 \frac{kg}{m^3}$

b) $23,3 \frac{g}{cm^3}\left(\frac{10^6\ cm^3}{1\ m^3}\right) = 2,33\times 10^7 \frac{g}{L}$

Ejemplos de conversiones involucrando múltiplos y submúltiplos decimales :

10) $2\times 10^6 \mathrm{cal}$ a :

a) J b) erg c) eV

a) $2\times 10^6 \mathrm{cal}\left(\frac{4.186\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{cal}}\right) = 8.3720\times 10^6\ \mathrm{J}$

b) $2\times 10^6 \mathrm{cal}\left(\frac{10^7\ \mathrm{erg}}{0,239\ \mathrm{cal}}\right) = 2\times 10^{13}\ \mathrm{erg}$

c) $2\times 10^6 \mathrm{cal}\left(\frac{2,613\times 10^{19}\ \mathrm{eV}}{0,239\ \mathrm{cal}}\right) = 2,1866\times 10^{26}\ \mathrm{eV}$

11) 8542,3 W a :

a) hp

a) $8542,3\ \mathrm{W}\left(\frac{1.341\times 10^{-3}\ \mathrm{hp}}{1\ \mathrm{W}}\right) = 11,455\ \mathrm{hp}$

12) 53,2 pm a :

a) nm b) km c) μin

$$\text{a) } 53,2\ p\text{m}\left(\frac{10^{-12}\ \text{m}}{1\ p\text{m}}\right)\left(\frac{1\ n\text{m}}{10^{-9}\ \text{m}}\right)=5,32\times10^{-2}\ n\text{m}$$

$$\text{b) } 53,2\ p\text{m}\left(\frac{10^{-12}\ \text{m}}{1\ p\text{m}}\right)\left(\frac{1\ k\text{m}}{10^{3}\ \text{m}}\right)=5,32\times10^{-14}\ k\text{m}$$

$$\text{c) } 53,2\ p\text{m}\left(\frac{10^{-12}\ \text{m}}{1\ p\text{m}}\right)\left(\frac{39,37\ \text{in}}{1\ \text{m}}\right)\left(\frac{1\ \mu\text{in}}{10^{-6}\ \text{in}}\right)=2,0945\times10^{-3}\ \mu\text{in}$$

13) $104,4\ G\text{N}$ a :

a) kg_f b) $M\text{lb}_\text{f}$ c) $n$dina

$$\text{a) } 104,4\ G\text{N}\left(\frac{10^{9}\ \text{N}}{1\ G\text{N}}\right)\left(\frac{0,1021\ kg_f}{1\ \text{N}}\right)=1,0659\times10^{10}\ kg_f$$

$$\text{b) } 104,4\ G\text{N}\left(\frac{10^{9}\ \text{N}}{1\ G\text{N}}\right)\left(\frac{0,2248\ lb_f}{1\ \text{N}}\right)\left(\frac{10^{6}\ lb_f}{1\ Mlb_f}\right)=2,3469\times10^{16}\ M\text{lb}_\text{f}$$

$$\text{c) } 104,4\ G\text{N}\left(\frac{10^{9}\ \text{N}}{1\ G\text{N}}\right)\left(\frac{10^{5}\ \text{dina}}{1\ \text{N}}\right)\left(\frac{1\ ndina}{10^{-9}\ \text{dina}}\right)=1,0440\times10^{25}\ ndina$$

14) $12340\ k\text{J}$ a :

a) Terg b) $m$cal c) ZeV

$$\text{a) } 12340\ k\text{J}\left(\frac{10^{3}\ \text{J}}{1\ k\text{J}}\right)\left(\frac{10^{7}\ \text{erg}}{1\ \text{J}}\right)\left(\frac{1\ T\text{erg}}{10^{12}\ \text{erg}}\right)=123,4\ T\text{erg}$$

$$\text{b) } 12340\ k\text{J}\left(\frac{10^{3}\ \text{J}}{1\ k\text{J}}\right)\left(\frac{0,239\ \text{cal}}{1\ \text{J}}\right)\left(\frac{1\ m\text{cal}}{10^{-3}\ \text{cal}}\right)=2,9493\times10^{9}m\text{cal}$$

$$\text{c) } 12340\ k\text{J}\left(\frac{10^{3}\ \text{J}}{1\ k\text{J}}\right)\left(\frac{6,242\times10^{18}\ \text{eV}}{1\ \text{J}}\right)\left(\frac{1\ Z\text{eV}}{10^{21}\ \text{eV}}\right)=7,7026\times10^{4}Z\text{eV}$$

15) $5\times10^{20}\ \text{cm}^3$ a :

a) daL b) μin^3 c) fL

$$\text{a) } 5\times10^{20}\ \text{cm}^3\left(\frac{10^{3}\ \text{L}}{10^{6}\ \text{cm}^3}\right)\left(\frac{1da\text{L}}{10^{1}\ \text{L}}\right)=5\times10^{20}\ da\text{L}$$

$$\text{b) } 5\times10^{20}\ \text{cm}^3\left(\frac{6,1\times10^{4}\text{in}^3}{10^{6}\ \text{cm}^3}\right)\left(\frac{1\ \mu\text{in}^3}{10^{-6}\ \text{in}^3}\right)=3,05\times10^{25}\ \mu\text{in}^3$$

$$\text{c) } 5\times10^{20}\ \text{cm}^3\left(\frac{10^{3}\ \text{L}}{10^{6}\ \text{cm}^3}\right)\left(\frac{1f\text{L}}{10^{-15}\ \text{L}}\right)=5\times10^{32}\ f\text{L}$$

16) $3{,}45\times10^{-31}$ g a :
a) Glb b) $n$lb c) $m$uma

a) $3{,}45\times10^{-31}\ \text{g}\left(\dfrac{2{,}205\ \text{lb}}{10^{3}\ \text{g}}\right)\left(\dfrac{1G\text{lb}}{10^{9}\ \text{lb}}\right)=7{,}6073\times10^{-43}\ G\text{lb}$

b) $3{,}45\times10^{-31}\ \text{g}\left(\dfrac{2{,}205\ \text{lb}}{10^{3}\ \text{g}}\right)\left(\dfrac{1n\text{lb}}{10^{-9}\ \text{lb}}\right)=7{,}6073\times10^{-25}\ n\text{lb}$

c) $3{,}45\times10^{-31}\ \text{g}\left(\dfrac{1\ k\text{g}}{10^{3}\ \text{g}}\right)\left(\dfrac{1\text{uma}}{1{,}6604\times10^{-27}\ k\text{g}}\right)\left(\dfrac{1m\text{uma}}{1\times10^{-3}\ \text{uma}}\right)=2{,}0778\times10^{-4}\ m\text{uma}$

CAPÍTULO II

Vectores

Tipos de magnitudes

Entre las distintas propiedades medibles puede establecerse una clasificación básica. Un grupo importante de quedan perfectamente determinadas cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes reciben el nombre de magnitudes escalares, la longitud, el volumen, la masa, la temperatura, la energía, son sólo algunos ejemplos.

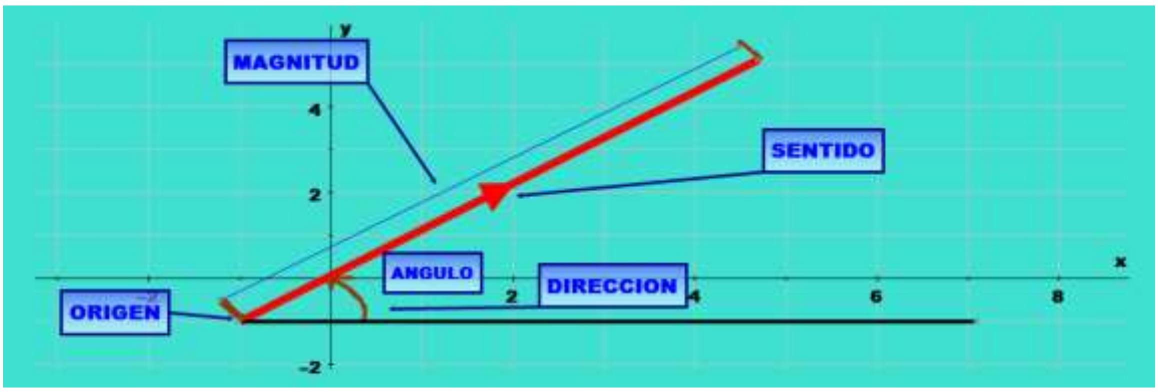
Sin embargo, existen otras que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores una dirección o una recta de acción y un sentido; son las llamadas magnitudes vectoriales o dirigidas. La fuerza es un ejemplo claro de magnitud vectorial, pues sus efectos al actuar sobre un cuerpo dependerán no sólo de su cantidad, sino también de lo largo de la línea a la cual se ejerza u acción.

Al igual que los números reales son utilizados para representar cantidades escalares, las cantidades vectoriales requieren el empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números, con mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos que pueden representar intensidad, dirección y sentido se denominan vectores .Las magnitudes que se manejan en la vida diaria son, por lo general, escalares aunque el dominio de la Física implica el manejo de vectores.

Representación grafica de un vector

Un vector se puede representar en una dimensión n, cuando se tiene un vector en R^2 se dice que está en un espacio bidimensional, y es un vector que tiene dos componentes; un vector en R^3 es un vector en el espacio tridimensional y tiene tres componentes, y en general, un vector en R^n es un vector en el espacio n-dimensional y tiene tres componentes.

La representación de un vector en R^2

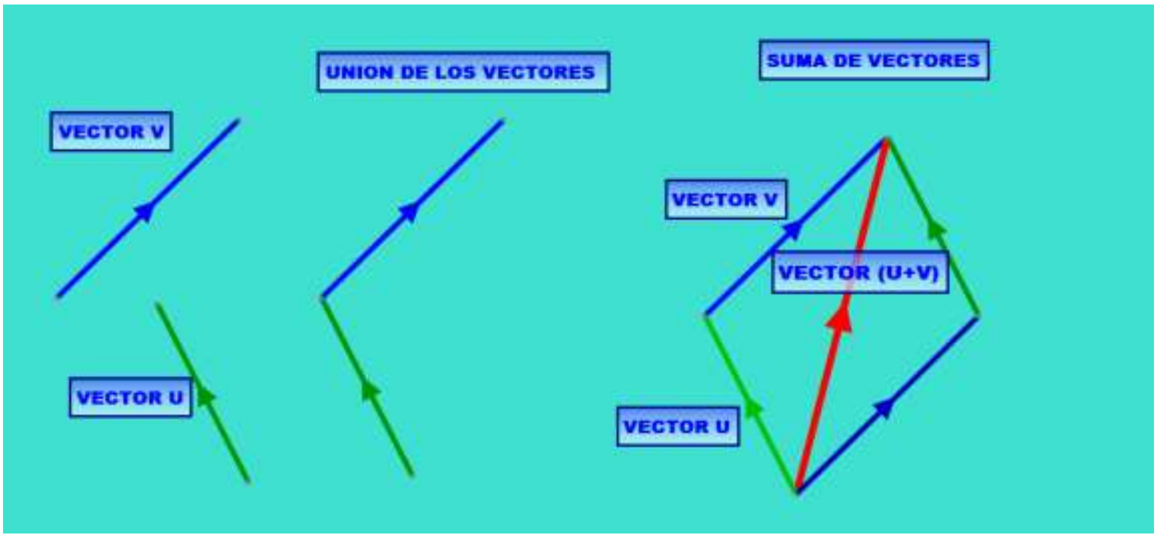


Suma de vectores

Para realizar la suma se tienen métodos gráficos y analíticos, se describirán a a continuación:

Procedimiento gráfico:

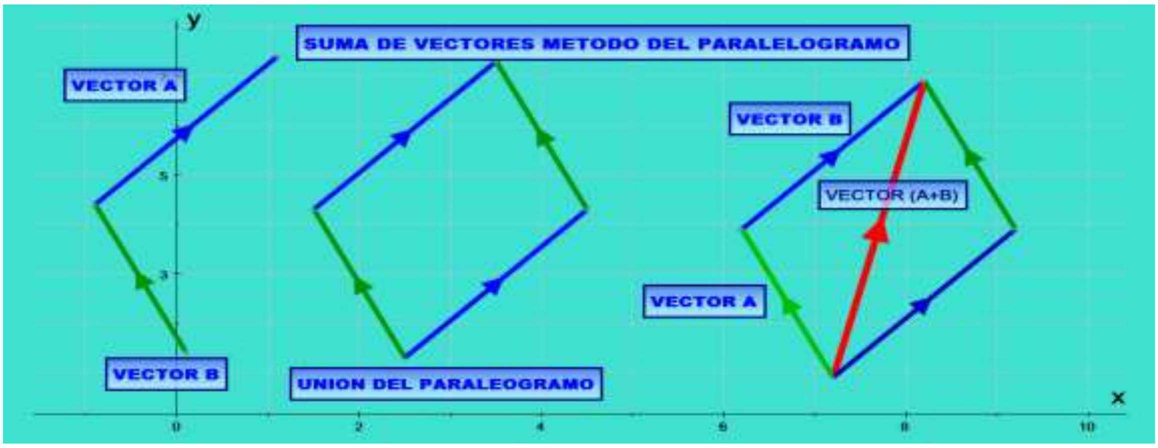
La suma de dos vectores está representada gráficamente como la unión del inicio de un vector con el final de otro. El ejemplo que se presenta a continuación ilustra lo anterior:



Como se puede observar el procedimiento para sumar dos vectores libres consiste primero en unir el final de un vector con el inicio de otro, y posteriormente realizar la suma; el vector suma une el inicio de un vector con el final de otro, y a este se le llama vector resultante.

Además la suma de vectores posee la propiedad de ser conmutativa, esto es u+v=v+u

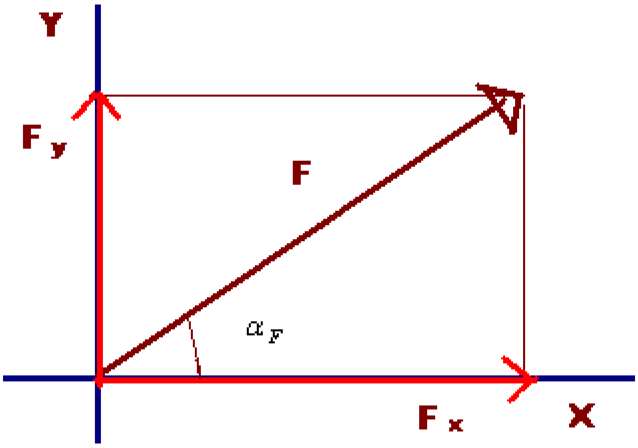
La suma grafica de dos vectores puede llevarse a cabo también empleando la regla del paralelogramo, que consiste en trasladar paralelamente los vectores hasta unirlos por el origen, y luego trazar un paralelogramo, con lados paralelos a cada uno de los vectores; la diagonal del paralelogramo es la resultante de la suma de los vectores. Se representa de la siguiente manera:



Componentes de un vector

Cualquier vector puede representarse como la suma de dos o más vectores ,a cualquier conjunto de vectores que al sumarse den el vector $\vec{v}$ *se les denomina componentes de* $\vec{v}$ *, las componentes tienen la característica de que son mutuamente perpendiculares.*

Para el caso de vectores en dos dimensiones se tiene:



Donde F_x *y* F_y *son los vectores componentes del vector F, de esta manera se tiene la relación de acuerdo al teorema de Pitágoras:*

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$$

y además

$$\alpha_F = \arctan \frac{F_y}{F_x}$$

Para obtener la resultante (suma) de un conjunto de vectores a partir de sus componentes primeramente se debe realizar la suma para cada eje y aplicar las ecuaciones anteriores de manera que:

$$F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{xi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{yi}\right)^2}$$

$$\alpha_F = \arctan \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} F_{xi}}$$

2.1 Ejercicios de suma de vectores

Realizar la suma analítica de vectores donde se conoce la magnitud de cada vector y el ángulo medido con respecto al eje horizontal

a) $F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 30N$
$\alpha_1 = 45, \alpha_2 = -45, \alpha_3 = -60$

SOLUCIÓN

Se realizan la suma de las componentes en cada eje

$$R_x = \sum F_x = 10\cos 45 + 20\cos 320 + 30\cos 300$$

$$R_x = 7,0711 + 15,3209 + 15$$
$$R_x = 37,392N$$
$$R_y = \sum F_y = 10sen45 + 20sen320 + 30sen300$$

$$R_y = 7,0711 - 12,8558 - 17,3205$$
$$R_y = -23,1052N$$

Se obtiene la magnitud del vector resultante empleando sus componentes

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}, F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{xi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{yi}\right)^2}$$
$$R = \sqrt{(37,392)^2 + (-23,1052)^2}$$
$$\underline{\underline{R = 29,3992N}}$$

Se obtiene la dirección del vector resultante

$$\alpha_R = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$
$$\alpha_R = \arctan \frac{-23,1052}{37,392}$$
$$\alpha_R = -31,7127$$
$$\underline{\underline{\alpha_R = 328,2873°}}$$

2

$$F_1 = 50, F_2 = 60, F_3 = 75,$$
$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 90, \alpha_3 = 225,$$

$$R_x = \sum F_x = 50\cos 0 + 60\cos 90 + 75\cos 225$$

$$R_x = 50 + 0 - 53,0330$$
$$R_x = -3.0330N$$
$$R_y = \sum F_y = 50\text{sen}0 + 60\text{sen}90 + 75\text{sen}225$$

$$R_y = 0 + 60 - 53,0330$$
$$R_y = 6.967N$$

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$
$$R = \sqrt{(-3.0330)^2 + (6.967)^2}$$
$$\underline{\underline{R = 6,2722N}}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$
$$\alpha_R = \arctan \frac{6.967}{-3.0330}$$
$$\alpha_R = -66,4747$$
$$\underline{\underline{\alpha_R = 293,5253°}}$$

c)

$$F_1 = 22, F_2 = 145, F_3 = 210, F_4 = 150, F_5 = 315$$
$$\alpha_1 = 45, \alpha_2 = 120, \alpha_3 = 200, \alpha_3 = 140, \alpha_3 = 360$$

$$R_x = \sum F_x = 22\cos 45 + 145\cos 120 + 210\cos 200 + 150\cos 140 + 315\cos 360$$

$$R_x = 15,5563 - 72,5 - 197,3355 - 114,9067 + 315$$
$$R_x = -54,1859N$$
$$R_y = \sum F_y = 22\text{sen}45 + 145\text{sen}120 + 210\text{sen}200 + 150\text{sen}140 + 315\text{sen}360$$

$$R_y = 15,5563 + 125,5737 - 71,8242 + 96,4181 + 0$$
$$R_y = 165,7239N$$

$$R = \sqrt{R_x + R}_y$$
$$R = \sqrt{(-54,1859)^2 + (165,7239)^2}$$
$$\underline{\underline{R = 156,6151N}}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{165,7239}{-54,1859}$$

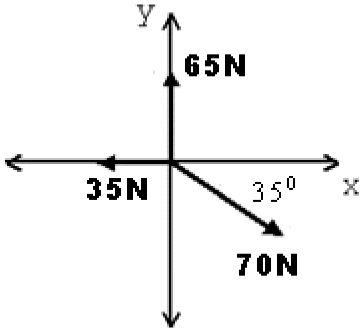
$$\alpha_R = -71,8941$$

$$\underline{\underline{\alpha_R = 288,1059°}}$$

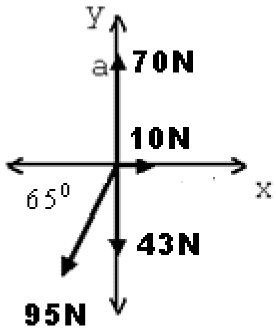
Ejercicios propuestos capítulo II

1.- Determinar el vector resultante para cada caso:

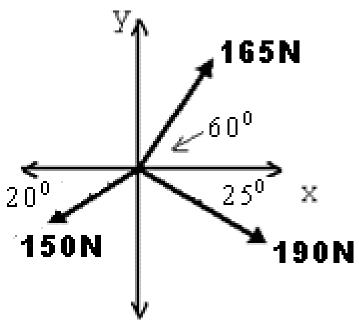
a)



b)



c)



2.- Dos fuerzas actúan sobre un objeto puntual de la siguiente forma: 1450 N a 170º y 1258 N a 50º. Calcular la resultante de ambas fuerzas.

3.- Una lancha se impulsa con una rapidez de 0,75 m/s en aguas tranquilas, atraviesa a lo ancho un río de 75 m de ancho. El río fluye con una rapidez de 0,33 m/s. ¿Con qué ángulo, respecto a la perpendicular a la corriente, se debe dirigir el bote?

4.- Un vehículo recorre 25 km rumbo al norte y después 76 km en una dirección 55º al oeste del *norte. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del vehículo.*

5.- Un avión viaja a la ciudad A localizada a 155 km en una dirección 35º al norte del este, luego se dirige a la ciudad B, a 140 km en dirección 32º al oeste del norte y, por último, vuela 175 km al oeste hacia la ciudad C. Encuentre la posición de la ciudad C respecto a la posición del punto de partida.

6.- Una excursionista inicia una excursión caminando primero 42 km hacia el sureste desde su campamento base. En el segundo día camina 30 km en una dirección 46º al norte del este. Determinar:

a) La componente del desplazamiento diario de la excursión.
b) Las componentes del desplazamiento resultante.
c) La magnitud y la dirección del desplazamiento total.

CAPÍTULO III

CINEMÁTICA

La cinemática es una parte de la física que se encarga de la descripción del movimiento. Tal descripción se apoya en la definición de una serie de magnitudes que son características de cada movimiento o de cada tipo de movimientos. Los movimientos más sencillos son los rectilíneos y dentro de éstos los uniformes. Los movimientos circulares son los más simples de los de trayectoria curva. Unos y otros han sido estudiados desde la antigüedad ayudando al hombre a forjarse una imagen o representación del mundo físico.

El movimiento y su descripción
Se dice que hay un movimiento cuando un cuerpo cambia su posición respecto de la de otros, supuestos fijos, o que se toman como referencia. El movimiento es por tanto, cambio de posición con el tiempo.
De acuerdo con la anterior definición, para estudiar un movimiento es preciso fijar previamente la posición del observador que contempla dicho movimiento. En física hablar de un observador equivale a situarlo fijo con respecto al objeto o conjunto de objetos que definen el sistema de referencia. Es posible que un mismo cuerpo esté en reposo para un observador -o visto desde un sistema de referencia determinado- y en movimiento para otro. Por ejemplo, una pelota que rueda por el suelo de un vagón de un tren en marcha, describirá movimientos de ciertas características, diferentes según sea observado desde el andén o desde uno de los asientos de su interior; un pasajero sentado en el interior de un avión que despega estará en reposo respecto del propio avión y en movimiento respecto de la pista de aterrizaje.
El estado de reposo o de movimiento de un cuerpo no es, por tanto, absoluto o independiente de la situación del observador, sino relativo, es decir, depende del sistema de referencia desde el que se observe.

Es posible estudiar el movimiento de dos maneras:
a) Cuando se describe a partir de ciertas magnitudes físicas como son: posición, velocidad y aceleración (cinemática); en este caso se estudia cómo se mueve un cuerpo.
b) Cuando se analizan las causas que originan dicho movimiento (dinámica),es este caso se estudia el porqué se mueve el cuerpo.

Vector de posición: Es un vector va desde el origen del sistema de coordenadas hasta el lugar donde se encuentra la partícula. De acuerdo con lo anterior, se dice que una partícula se mueve respecto a un sistema de coordenadas, cuando su vector de posición cambia a medida que transcurre el tiempo. En el sistema internacional, el vector de posición se expresa en [m].

Trayectoria: Para facilitar el estudio del movimiento, se representa a los cuerpos en movimiento por puntos geométricos, independientemente de su forma y tamaño. La línea que describe el punto que representa al cuerpo en movimiento, conforme va ocupando posiciones sucesivas a lo largo del tiempo se denomina trayectoria. Según sea la forma de su trayectoria los movimientos se clasifican en rectilíneos y curvilíneos.
Vector desplazamiento: Si una partícula se mueve desde un punto a otro, el vector desplazamiento o desplazamiento de la partícula, se define como el vector que va desde la posición inicial a la final.

Velocidad y aceleración
La descripción de un movimiento supone e! conocer algo que su trayectoria. Una característica que añade una información importante sobre el movimiento es la velocidad.

Velocidad media:

Suponga que en cierto instante t_1 una partícula se encuentra en su posición definida por el vector de posición $\vec{x}_1$ y posteriormente en el instante t_2 con su posición definida por $\vec{x}_2$ .El desplazamiento que ha efectuado la partícula es $\Delta\bar{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$.El intervalo de tiempo que ha transcurrido es $\Delta t = t_2 - t_1$.

Se denomina velocidad media $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$.

En el SI la velocidad se expresa [m/s], sin embargo, en la vida diaria es poco frecuente la utilización de una unidad práctica de velocidad, el kilómetro/hora [km/h], que no corresponde al SI.

Velocidad instantánea: En general, la velocidad con la que se mueve un objeto varía de un instante a otro. El valor que toma la velocidad en un instante dado recibe el nombre de instantánea.

A pesar de que la noción de instante, al igual que la noción de punto, constituye una abstracción, es posible aproximarse bastante a ella considerándola como un intervalo de tiempo muy pequeño. Si se analiza el movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo Δt y se divide ese intervalo en sub intervalos, las velocidades medias en esos sub-intervalos no tiene necesariamente que coincidir con la velocidad media del intervalo completo. Esto significa que si bien la velocidad media es representativa del movimiento de la partícula en el intervalo de tiempo considerado como un todo, no da cuenta del movimiento de la partícula instante a instante, si el intervalo de tiempo considerado es relativamente grande, usar la velocidad media para describir el movimiento de la partícula instante a instante nos puede llevar a cometer errores ,sin embargo si los intervalos de tiempo son relativamente pequeños, la velocidad media describe de mejor forma el movimiento de la partícula en instante durante ese pequeño intervalo, Por lo tanto se define la velocidad instantánea de la partícula como la velocidad media de la partícula en un tiempo muy pequeño, denominado infinitesimal, o sea en el límite cuando Δt tiende a cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Observaciones:

I.- Note que a medida que el intervalo de tiempo Δt se hace cada vez más pequeño, el vector velocidad aproxima a la trayectoria, que en el caso infinitesimal, el vector velocidad instantánea queda tangente a la trayectoria

II.-La palabra rapidez, en física, se usa representar la magnitud del vector velocidad.

Aceleración media: Considere que en los instantes t_1 y t_2 las velocidades instantáneas de la partícula son v_1 y v_2 . Es decir, en el intervalo de tiempo Δt la partícula sufre una variación de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, por lo tanto, la aceleración media o variación temporal media de la velocidad es dada por

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

En el sistema Internacional la aceleración se expresa en ${}^{m}\!/_{s^2}$.

Aceleración instantánea: A partir del mismo criterio usado para definir el concepto de velocidad instantánea, se define la aceleración instantánea como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

TIPOS DE MOVIMIENTOS

3.1 Movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.)

El movimiento rectilíneo y uniforme fue definido, por primera vez, por Galileo en los siguientes términos: «Por movimiento igual o uniforme entiendo aquél en el que los espacios recorridos por un móvil en tiempos iguales, tómense como se tomen, resultan iguales entre sí», o dicho de otro modo, es un movimiento de velocidad constante. Puesto que la partícula recorre distancias iguales en tiempos iguales, (para fines prácticos de notación se puede eliminar la notación de vectores).

$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ *, donde* $\Delta t = t_2 - t_1$ *,* $\Delta x = x_2 - x_1$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Que puede expresarse como:

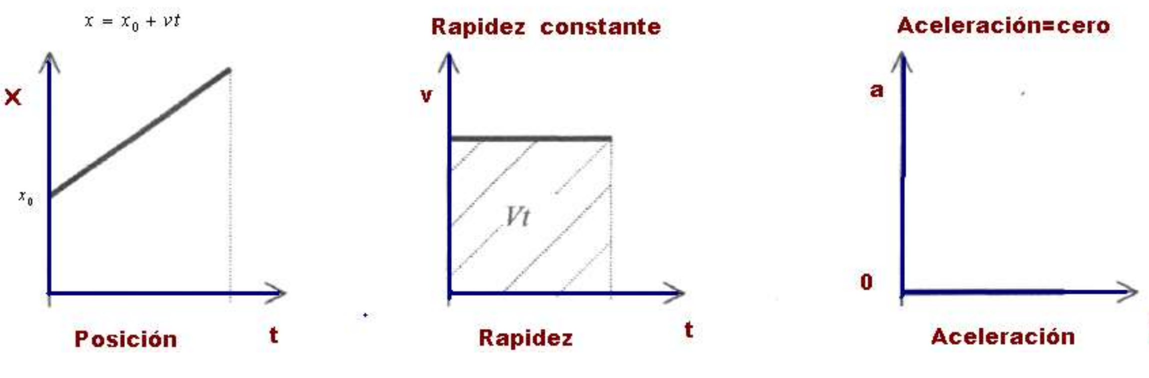
$$x_2 = x_1 + (t_2 - t_1)$$

Por comodidad, redefiniendo las variables: $x_2 = x, x_1 = x_0, t_1 = 0$ *, donde* x_0 *representa la posición inicial de la partícula. Y la ecuación queda definida como:*

$$x = x_0 + vt$$

Gráficos

Para el particular de un móvil moviéndose con rapidez v en el sentido positivo del eje X, tal que en $t_1 = 0$ *,* $x = x_0$



Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

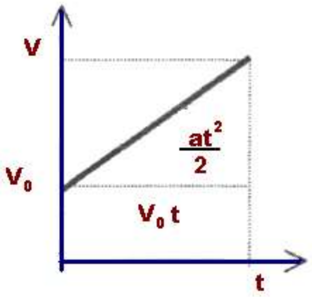
Este movimiento ocurre en una sola dirección y con aceleración constante, si el cuerpo tiene aceleración constante irá ganado velocidad de manera uniforme, es decir con el mismo ritmo. En otras palabras el móvil gana velocidades iguales en tiempos iguales y en este caso la velocidad es proporcional al tiempo.

Ejemplos de este tipo de movimiento se presentan en una rueda deslizándose sobre un plano o cuando se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio.

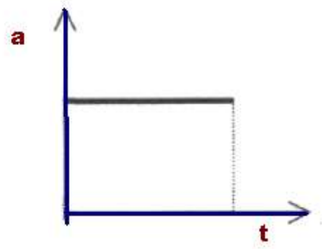
Este es el significado del movimiento uniformemente acelerado, el cual en tiempos iguales tómense como se tomen, adquiere iguales incrementos de velocidad. Es decir, la aceleración media coincide con la instantánea. Entonces de la ecuación:

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, *si* $v = v - v_0, \Delta t = t - 0$, *siendo* v_0 *la velocidad inicial se obtiene la relación entre aceleración y velocidad.*

La ecuación anterior nos dice que la velocidad aumenta linealmente con el tiempo.
Las gráficas de este movimiento son las siguientes:



velocidad contra tiempo



Aceleración contra tiempo

En la primer gráfica la pendiente es $m = \Delta v/\Delta t$ *, correspondiente a la aceleración del móvil, también para esa misma grafica la base del rectángulo está dada por el tiempo y la altura por la velocidad inicial, para el triangulo la hipotenusa es la aceleración y el área del triángulo es* $\frac{1}{2}att$ *, entonces la suma de áreas da el desplazamiento y se tiene:*

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad o$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

La gráfica para la posición de la partícula es una parábola con variable t.
Por otra parte del producto $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ *se obtiene*

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Se tiene además de la definición de velocidad:
$$v = v_0 + at$$
Para el caso en que la aceleración es paralela al desplazamiento (movimiento acelerado) el signo de la aceleración es positivo y si la aceleración forma 180^0 *(movimiento retardado) el signo de la aceleración es negativo.*

3.2 Caída libre y tiro vertical

La caída libre bajo la acción de la gravedad es el caso más importante de movimiento uniformemente acelerado. Ante la ausencia de un medio oponiendo resistencia como el aire, es decir en el vacío, el movimiento de caída es de aceleración constante, siendo dicha aceleración la misma para todos los cuerpos, independientemente de su forma y su peso. La presencia de aire frena ese movimiento de caída y la aceleración pasa a depender entonces de la forma del cuerpo. No obstante, para cuerpos aproximadamente esféricos, la influencia del medio sobre el movimiento puede despreciarse y tratarse, en una primera aproximación, como si fuera de caída libre.

La aceleración en los movimientos de caída libre, conocida como aceleración de la gravedad, se representa por la letra g ($a = -gj$ *) y toma un valor aproximado de 9,8 [m/s2].*

Para el movimiento de caída libre se pueden emplear las ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado , donde se conoce el valor de la aceleración de la gravedad , entonces las ecuaciones de caída libre se expresan como

$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ *para determinar la posición con respecto al tiempo.*

$v^2 = v_0^2 + 2a\left(h - h_0\right)$ *para determinar la velocidad en cualquier posición .*

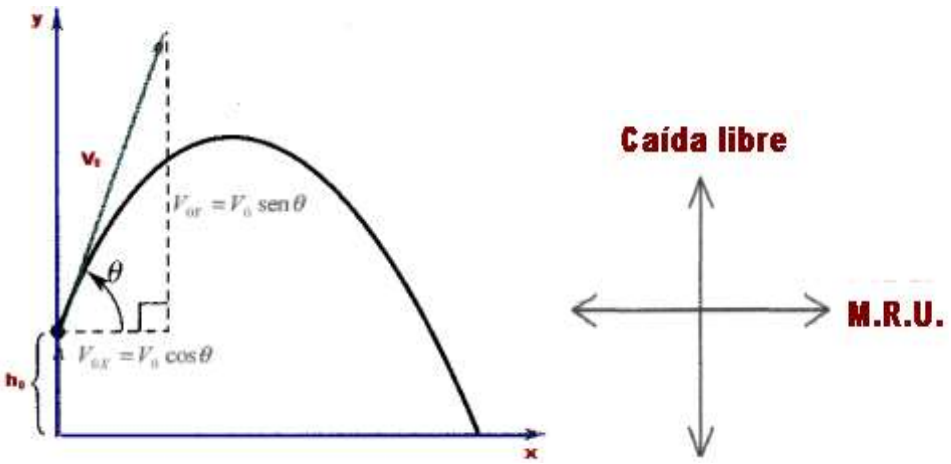
En base a la ultima ecuación para el caso de tiro vertical, la altura máxima se alcanza cuando la velocidad final v *es cero.*

Para este tipo de movimiento se aplica también la relación entre velocidad y tiempo:

$v = v_0 + gt$

3.3 Movimiento en dos dimensiones

Cuando se combina el movimiento rectilíneo con la caída libre se tiene el caso del movimiento en dos dimensiones, aplicable para el estudio de movimiento de proyectiles.



En el diagrama se representa un caso particular del disparo de un proyectil lanzado con velocidad inicial v_0*, misma que forma un ángulo* θ *con la horizontal. Puesto que la velocidad inicial* v_0 *se descompone en una componente horizontal* $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ *y otra vertical* $v_{0y} = v_0 sen\theta$*; el movimiento de las coordenadas es dado por las ecuaciones:*

En el eje x M.R.U.

$x = x_0 + v_{0x} t \rightarrow x = x_0 + v_0 \cos\left(\theta\right) t$

Eje y caída libre :

$h = h_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow h = h_0 + v_0 sen\left(\theta\right) t + \frac{1}{2} g t^2$

Combinando ambas ecuaciones se tiene

$$h = tg\left(\theta\right) x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\left(\theta\right)} x^2$$

La ecuación anterior describe la trayectoria de una parábola y relaciona la altura en cualquier instante con la velocidad inicial y el desplazamiento horizontal.

Para el caso de las velocidades se tiene:

En el eje X:

Como en tal eje no hay aceleración

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta = \text{constante}$

En el eje Y

$v_y = v_{0y} - gt = v_0 sen\theta - gt$

Altura máxima

Se puede determinar empleando la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2g\left(h - h_0\right)$ *y cuando la altura es* *máxima la velocidad final en el eje y es cero, por lo que*

$h = h_0 + \frac{-v_0^2}{2g}$ *o bien*

$$h = h_0 + \frac{-\left(v_0 sen\theta\right)^2}{2g}$$

Alcance horizontal máximo

Es la distancia horizontal máxima que puede cubrir el proyectil. Si se emplea la ecuación de trayectoria se puede notar que la distancia horizontal recorrida es máxima para Y=0, es decir cuando el proyectil llega al suelo.

Reemplazando estos valores en $h = tg\left(\theta\right)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\left(\theta\right)}x^2$

Ordenando y agrupando resulta

$$X_{\max} = \frac{v_0{}^2 sen2\theta}{g}$$

El alcance horizontal será máximo cuando $sen2\theta$ *sea máximo, es decir, igual a uno, por lo tanto X es máxima para* $\theta = 45^0$*.*

Cabe recordar que estas últimas 3 ecuaciones son particulares para el ejemplo mencionado en el diagrama.

3.4 Ejercicios de Cinemática

1.-Una automóvil que estaba detenido en un semáforo arranca en el momento en que se pone la luz verde, al mismo tiempo, otro automóvil cuya velocidad es de $12 \,{}^{m}\!/_{s}$ *y es constante lo alcanza y rebasa, si el primer automóvil acelera a* $3 \,{}^{m}\!/_{s}$ *determinar*

a) La distancia a la cual lo alcanzará.
b) La velocidad a la que lo alcanzará.

SOLUCIÓN

a) Si se toma como referencia el semáforo se conoce

$$v_{01} = 0 \,{}^{m}\!/_{s}, a_1 = 3 \,{}^{m}\!/_{s^2}$$
$$v_{02} = 12 \,{}^{m}\!/_{s}, a_2 = 0 \,{}^{m}\!/_{s^2}$$

Siendo x_1 *la distancia recorrida por el primer auto y* x_2 *la distancia recorrida por el segundo, en el momento en que se alcanzan se tiene que* $x_1 = x_2$ *, entonces de acuerdo a la ecuación de distancia recorrida se pueden igualar los recorridos*

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x_{01} + v_{01}t_1 + \frac{1}{2}at_1^2 = x_{02} + v_{02}t_2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2$$

Además $t_1 = t_2$ *y la ecuación se reduce a*

$$\frac{1}{2}\left(3\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)t^2 = \left(12\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\right)t$$

$$t = \frac{2\left(12\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\right)}{3\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}}$$

$$t = 8s$$

Entonces la distancia recorrida es

$$x = \frac{1}{2}\left(3\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)t^2$$

$$x = \frac{1}{2}\left(3\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)\left(8s\right)^2$$

$$\underline{x = 96m}$$

b)

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

$$v^2 = 2\left(3\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)\left(96m\right)$$

$$\underline{v = 24\,{}^{m}\!/\!{}_{s}}$$

2.-Sobre la superficie lisa de un plano inclinado se deja caer una pelota inicialmente en reposo, se necesitaron 6 s para recorrer 1,2 m. Determinar

a) La aceleración de la pelota al final del recorrido.
b) La distancia vertical recorrida desde el inicio del movimiento.

SOLUCIÓN

a) Se conoce

$$v_0 = 0\,{}^{m}\!/\!{}_{s},\ x_0 = 0m,\ t = 6s,\ x = 1,2m$$

Con la ecuación de distancia recorrida se puede conocer la aceleración

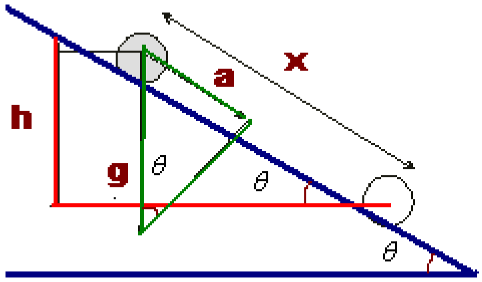
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

$$a = \frac{2\left(1,2m\right)}{\left(6s\right)^2}$$

$$\underline{a = 6,667\,{}^{cm}\!/\!{}_{s^2}}$$

b) Como la pelota desciende por el plano sin fricción, la pelota desciende por efecto de la gravedad, entonces la aceleración calculada en el inciso anterior es una componente de la aceleración de la gravedad. Se tiene la figura



Se observa que se forman dos triángulos rectángulos, en el primero de ellos se conoce la hipotenusa, g y un cateto, a y se emplea la función seno para determinar el ángulo y con ello obtener la altura del otro triangulo rectángulo.

$$sen\theta = \frac{a}{g}$$

$$\theta = arcsen\frac{0,2667\,{}^{m}/_{s^2}}{9,81\,{}^{m}/_{s^2}}$$

$$\theta = 1,56^0$$

$$h = xsen\theta$$

$$h = (1,2m)sen(1,56^0)$$

$$\underline{h = 3,27cm}$$

3.- Un vehículo parte del reposo y se mueve con una aceleración de $1,3\,{}^{m}/_{s^2}$ durante 1,5 s. Posteriormente el motor se apaga y debido a la fricción el vehículo se desacelera durante 9 s a $3\,{}^{cm}/_{s^2}$ .Entonces se frena y el vehículo tarda 4 s más en detenerse. Determinar la distancia total recorrida por el vehículo.

SOLUCIÓN

Se conocen algunos datos para cada intervalo recorrido

Intervalo 1 $v_0 = 0\,{}^{m}/_{s}, a_1 = 1,3\,{}^{m}/_{s^2}, t_1 = 1,5s$

Intervalo 2 $a_2 = 3\,{}^{cm}/_{s^2}, t_2 = 9s$

Intervalo 3 $v_f = 0\,{}^{m}/_{s}, t_1 = 4s$

Se calculan los datos faltantes para cada intervalo ya sean velocidades o aceleraciones

La velocidad al final de la etapa 1 es la velocidad de inicio de la etapa 2

$$v_1 = v_0 + at \quad v_1 = 0 + (1,3\,{}^{m}/_{s^2})(1,5s) \;\; v_1 = 1,95\,{}^{m}/_{s}$$

$$v_1 = v_{02} = 1,95 \,{}^{m}\!/\!_{s}$$

La velocidad final de la etapa 2 es la velocidad inicial de la etapa 3

$$v_{f2} = v_{03} = v_{02} + at$$
$$v_{f2} = v_{03} = 1,95 \,{}^{m}\!/\!_{s} + \left(-3 \,{}^{cm}\!/\!_{s}{}^{2} \left({}^{1m}\!/\!_{100cm}\right)\right) 9\text{s}$$
$$v_{f2} = v_{03} = 1,68 \,{}^{m}\!/\!_{s}$$

La velocidad final de la etapa 2 es la velocidad inicial en la tercera etapa por lo que la aceleracion en la tercer etapa es

$$v_{f3} - v_{03} = at$$
$$a = \frac{-v_{03}}{t}, a = \frac{-1,68 \,{}^{m}\!/\!_{s}}{4s},\ a = -0,42 \,{}^{m}\!/\!_{s^2}$$

Ya que se conocen todos los valores de velocidad y de aceleración para cada etapa, se determina la distancia para cada intervalo

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$x_T = x_1 + x_2 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1,3 \,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)\left(1,5s\right)^2 = 1,4625m$$
$$x_2 = \left(1,95 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left(9s\right) + \frac{1}{2}\left(-3 \,{}^{cm}\!/\!_{s^2} \left({}^{1m}\!/\!_{100cm}\right)\right)\left(9\text{s}\right)^2 = 16,3m$$
$$x_T = 1,4625m + 16,3m + \left(1,68 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left(4s\right) + \frac{1}{2}\left(-0,62 \,{}^{m}\!/\!_{s^2}\right)\left(4s\right)^2$$
$$\underline{x_T = 19,5225m}$$

4.-Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio y después de 1,5 s se lanza otra pelota verticalmente hacia abajo con una velocidad de $25 \,{}^{m}\!/\!_{s}$ *; determinar la distancia por debajo del punto de lanzamiento para la cual la segunda pelota alcanza a la primera.*

SOLUCIÓN

Considerando como punto de referencia para el movimiento la parte alta del edificio, para el caso de caída libre o forzada como es este caso se considera que tanto la velocidad como la aceleración de la gravedad tienen el mismo signo

De acuerdo con la ecuación $h = h + v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$ *se puede conocer la posición de la primera pelota en el momento en que se lanza la segunda.*

$$h = 0, v_{0y} = 0, g = -9{,}81 \, m/s^2$$
$$h = \tfrac{1}{2}\left(-9{,}81 \, m/s^2\right)\left(1{,}5s\right)^2$$
$$\underline{h = -11{,}0363m}$$

Se determina también la velocidad de la primera piedra en el momento en que se lanza la segunda.

$$v = v_0 + at$$
$$v = 0 + \left(-9{,}81 \, m/s^2\right)\left(1{,}5s\right)$$
$$\underline{v = -14{,}715 \, m/s}$$

Ahora se emplea la ecuación $h = h + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$ *para igualar la posición de cada una de las pelotas con el fin de conocer el tiempo que tardan en encontrarse:*

$$\text{altura de pelota } 1 = \text{altura de pelota } 2$$
$$\left(-11{,}0363m\right) - \left(14{,}715 \, m/s\right)t + \tfrac{1}{2}\left(-9{,}81 \, m/s^2\right)t^2 = \left(0m\right) + \left(-25 \, m/s\right)t + \tfrac{1}{2}\left(-9{,}81 \, m/s^2\right)t^2$$

Simplificando

$$\left(-11{,}0363m\right) = \left(-25 \, m/s + 14{,}715 \, m/s\right)t$$
$$t = \frac{-11{,}0363m}{-10{,}285 \, m/s}$$
$$\underline{t = 1{,}0730s}$$

Para conocer la distancia en la cual se encuentran se sustituye el tempo en cualquier altura:

$$h = \left(0m\right) + \left(-25 \, m/s\right)\left(1{,}0730s\right)t + \tfrac{1}{2}\left(-9{,}81 \, m/s^2\right)\left(1{,}0730s\right)^2$$
$$\underline{h = -32{,}4723m}$$

5.-Se lanza una piedra de manera vertical hacia arriba y la velocidad que tiene cuando llega a la mitad de su altura máxima es de $15 \, m/s$ *.*

a) Determinar la altura máxima que alcanza.
b) La velocidad y aceleración después de 1,4 s de lanzada.
c) La velocidad y aceleración después de 3 s de lanzada.

SOLUCIÓN

a) Si se plantea el piso como la referencia de movimiento y para el caso de tiro vertical hacia arriba, la velocidad y la aceleración de la gravedad tienen signo contrario.

$$v_y{}^2 - v_{0y}^2 = 2gh$$

Se plantean dos ecuaciones considerando el intervalo desde el inicio del lanzamiento hasta la mitad de la altura total alcanzada, para este primer intervalo se tiene $v_y = 15 \, {}^m\!/\!_s, h = \frac{h}{2}$ *y la ecuación relacionada es*

$$\frac{h}{2} = \frac{\left(15 \, {}^m\!/\!_s\right)^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

Se aplica la ecuación para el segundo intervalo considerando el inicio del lanzamiento y el momento en que la altura es máxima, en este caso $v_y = 0 \, {}^m\!/\!_s$ *y la ecuación relacionada es*

$$h = \frac{-v_{0y}^2}{2g}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones sustituyendo h en la primer ecuación

$$\frac{-v_{0y}^2}{2(2g)} = \frac{\left(15 \, {}^m\!/\!_s\right)^2 - v_{0y}^2}{2g}$$

Y se tiene

$$v_0 = 21,2132 \, {}^m\!/\!_s$$

Por lo que la altura máxima alcanzada es

$$h = \frac{-v_{0y}^2}{2g}$$

$$h = \frac{-\left(21,2132 \, {}^m\!/\!_s\right)^2}{2\left(-9,81 \, {}^m\!/\!_{s^2}\right)}$$

$$\underline{h = 22,9358m}$$

b) Para determinar la velocidad después de transcurrido 1,4 s se emplea la ecuación del movimiento rectilíneo con aceleración $g = -9,81 \, {}^m\!/\!_{s^2}$.

$$v_y = v_{0y} + gt$$

$$v_y = 21,2132 \, {}^m\!/\!_s - \left(9,81 \, {}^m\!/\!_{s^2}\right)\left(1,4s\right)$$

$$\underline{v_y = 7,4792 \, {}^m\!/\!_s}$$

El signo positivo indica que la piedra va todavía en ascenso.

c) Para determinar la velocidad después de transcurrido 3 s se emplea la ecuación del movimiento rectilíneo con aceleración $g = -9,81 \, {}^m\!/\!_{s^2}$.

$$v_y = v_{0y} + gt$$
$$v_y = 21,2132\,{}^{m}\!/_{s} - \left(9,81\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)\left(3s\right)$$
$$\underline{v_y = -8,2168\,{}^{m}\!/_{s}}$$

El signo negativo de la velocidad indica que ya se ha alcanzado la altura máxima y por lo tanto la piedra va en caída libre.

6.-Una persona observa desde una ventana el paso de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba desde el piso , se estima que la velocidad en el momento en que pasa es de $7\,{}^{m}\!/_{s}$ *.Si la altura de la ventana con respecto al suelo es de 12m determinar*

a) La altura sobre el piso que alcanzará el objeto.
b) El tiempo que tarda el objeto en llegar desde la altura de la ventana hasta el punto más alto.
c) Aceleración y la velocidad del objeto después de 0,8s.

SOLUCIÓN

a) Se toma como referencia la posición del lanzador y se puede conocer la velocidad inicial sabiendo que cuando la altura es de 12m la velocidad del objeto es $7\,{}^{m}\!/_{s}$, así que tomando está como la velocidad final se sustituye en la ecuación

$$v_y^{\,2} - v_{0y}^2 = 2gh$$

Y se tiene

$$v_{0y} = \sqrt{\left(7\,{}^{m}\!/_{s}\right)^2 - 2\left(-9,81\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)\left(12m\right)}$$
$$v_{0y} = 16,8653\,{}^{m}\!/_{s}$$

Por lo que la altura máxima es

$$h = \frac{-v_{0y}^2}{2g}$$
$$h = \frac{-\left(16,8653\,{}^{m}\!/_{s}\right)^2}{2\left(-9,81\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)}$$
$$\underline{h = 14,4974m}$$

b) Considerando e l intervalo desde la ventana hasta el punto donde la altura es máxima

$$v_{f_y} = v_{0y} + at$$
$$t = \frac{-16,8653 \, m/s}{-9,81 \, m/s^2}$$
$$\underline{t = 1,7192s}$$

c) Con la ecuación anterior se determina la velocidad , siendo la aceleración la de la gravedad

$$v_{f_y} = v_{0y} + at$$
$$v_{f_y} = 16,8653 \, m/s + \left(-9,81 \, m/s^2\right)\left(0,8s\right)$$
$$\underline{v_{f_y} = 9,0173}$$

7.-Una pelota cae desde el borde de una mesa de 1,5m de altura y toca el suelo a un punto situado a 2 m del borde de la mesa, determinar:

a) El tiempo en el aire que dura la pelota
b) La velocidad inicial
c) La magnitud y dirección de la velocidad.

SOLUCIÓN

Se toma como referencia el borde superior de la mesa y se determina el movimiento de la pelota en el eje vertical y se emplea la ecuación $v_y^2 - v_{0y}^2 = 2gh$ *, en el momento en que sale del borde exterior de la mesa la componente vertical de la velocidad es cero (*$v_{0y} = 0$*) y se tiene*

$$v_y = \sqrt{2gh}$$
$$v_y = \sqrt{2\left(-9,81 \, m/s^2\right)\left(-1,5m\right)}$$
$$v_y = -5,4249 \, m/s$$

Se descarta el signo positivo de acuerdo a las referencias para el movimiento.Se calcula el tiempo de vuelo con la ecuación $v_y = v_{0y} + at$ *con* $a = g = -9,81 \, m/s^2$

$$t = \frac{v_y}{g}$$
$$t = \frac{-5,4249 \, m/s}{-9,81 \, m/s^2}$$
$$\underline{t = 0,553s}$$

b) La velocidad inicial es igual a la velocidad en el eje x ya que la componente vertical es cero , así que

$$v_0 = v_{0x} = \frac{x}{t}$$
$$v_0 = \frac{2,5m}{0,553s}$$
$$\underline{v_0 = 4,52\, {}^{m}\!/_{s}}$$

d) La magnitud de la velocidad en el momento del impacto es:

$v = \sqrt{(\mathrm{v_x})^2 + (v_y)^2}$ *y como la velocidad en el eje x permanece constante se tiene*

$$v = \sqrt{(\mathrm{v_x})^2 + (v_y)^2}$$
$$v = \sqrt{(4,52\, {}^{m}\!/_{s})^2 + (-5,4249\, {}^{m}\!/_{s})^2}$$
$$\underline{v = 7,0612\, {}^{m}\!/_{s}}$$

Y la dirección de la velocidad en el momento del impacto es

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{\mathrm{v_x}}$$
$$\theta = \arctan \frac{-5,4249\, {}^{m}\!/_{s}}{4,52\, {}^{m}\!/_{s}}$$
$$\underline{\theta = -50,2^0}$$

8.-Se deja caer un objeto y de manera simultánea se tira hacia abajo otro objeto con una velocidad inicial de $2\, {}^{m}\!/_{s}$ *, determinar el tiempo transcurrido para que la distancia entre ellos sea 10m.*

SOLUCIÓN

Se toma como referencia para el movimiento la posición desde la cual se lanzan los objetos , siendo el objeto 1 el de caída libre y el 2 el de caída forzada y de esta manera se conocen

$$v_{01} = 0, v_{02} = -2\, {}^{m}\!/_{s}, h_2 - h_1 = -10m$$

Se establecen las ecuaciones de posición para cada objeto con la ecuación $h = h_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

En ambas ecuaciones $h_0 = 0$ *y se tiene*

$h_1 = \frac{1}{2}gt^2, h_1 = \frac{1}{2}gt^2$

$h_2 = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$

$h_2 - h_1 = -10m$

$v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}gt^2 = -10m$

$t = \dfrac{-10m}{-2\, {}^{m}\!/\!_{s}}$

$\underline{t = 5s}$

9.-Un avión de caza bombardero se encuentra volando horizontalmente a una altura de 1,5 Km y lleva una velocidad de $160\, {}^{Km}\!/\!_{h}$ *; determinar:*

a) *El tiempo de anticipación con el que el bombardero debe soltar la bomba para dar en el blanco.*

b) *La velocidad de la bomba al momento del impacto.*

c) *La velocidad de la bomba al los 8 s de haberse soltado.*

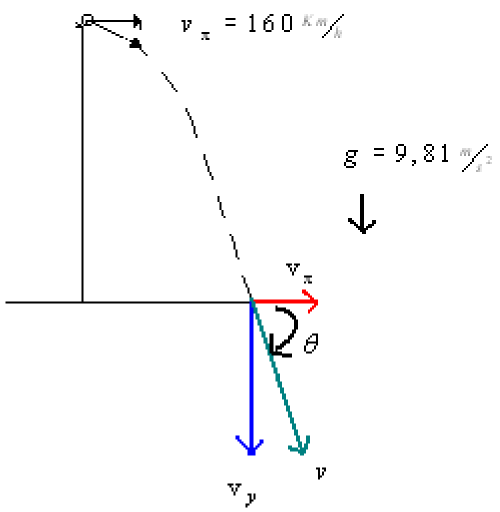
d) *La velocidad de la bomba cuando se encuentra a una altura de 200m.*

e) *El ángulo formado con la horizontal al momento del impacto.*

f) *La distancia horizontal recorrida.*

SOLUCION:

Se toma como referencia el suelo y consideran la aceleración de la gravedad positiva al ir cayendo la bomba. El diagrama que representa el movimiento del avión y de la bomba es el siguiente :



a) *El tiempo para soltar la bomba es el mismo que dura cayendo, cuando se lanza la bomba la velocidad en el eje y es cero, y solamente lleva velocidad en el eje x. De acuerdo con lo anterior la ecuación conveniente es :*

$$h = h_0 + v_{0y} + \tfrac{1}{2} g t^2$$

Al momento del impacto la h altura es cero y además la componente de la velocidad inicial en el eje y es cero, así que se despeja t

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Se sustituyen $h = 0, h_0 = 1,5Km$ y $g = -9,81 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}$

$$t = \sqrt{\frac{2\left(1,5Km\right)\left(\frac{1000m}{1Km}\right)}{9,81 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}}}$$

$$\underline{t = 17,48s}$$

b) *De la ecuación*

Se emplea la ecuación $v_y = v_{0y} + gt$ *pare determinar la componente de la velocidad en eje y momento del impacto, sustituyendo el valor del tiempo obtenido anteriormente (El tiempo que tarda en impactarse es el tiempo que dura en el aire) .*

$$v_y = 0' + \left(9,81 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)\left(17,48s\right)$$

$$v_y = -171,4788 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

La componente es negativa ya que la bomba desciende.

La componente en el eje x de la velocidad es constante por lo que la componente es la velocidad inicial $\mathrm{v_x} = 160 \, {}^{Km}\!/\!_{h}$ *, antes de realizar la sustitución se hacen consistentes las unidades*

$$\mathrm{v_x} = \left(160 \, {}^{Km}\!/\!_{h}\right)\left(\frac{1000m}{1Km}\right)\left(\frac{1h}{3600s}\right)$$

$$\mathrm{v_x} = 44,44 \, {}^{m}\!/\!_{s}$$

Con esto la velocidad de la bomba al momento del impacto es:

$$v = \sqrt{\left(\mathrm{v_x}\right)^2 + \left(v_y\right)^2}$$

$$v = \sqrt{\left(44,44 \, {}^{m}\!/\!_{s}\right)^2 + \left(-171,4788 \, {}^{m}\!/\!_{s}\right)^2}$$

$$\underline{v = 177,1448 \, {}^{m}\!/\!_{s}}$$

c) *Para conocer la velocidad de la bomba pasados 8 s de haberse soltado se emplean las ecuación*

$$v_y = v_{0y} + gt$$
$$v_y = 0\acute{} + \left(9{,}81\, {}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)\left(8s\right)$$
$$v_y = -78{,}48\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Y la velocidad es:

$$v = \sqrt{\left(44{,}44\, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2 + \left(-78{,}48\, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2}$$
$$\underline{v = 90{,}19\, {}^{m}\!/\!{}_{s}}$$

d) *En este caso se conoce la altura de la bomba , para calcular la componente* v_y *de la velocidad se utiliza la ecuación*

$$v_y{}^2 - v_{0y}^2 = 2gh$$

$$v_y = \sqrt{2gh - v_0^2}$$

Sustituyendo los valores conocidos se tiene

$$v_y = \sqrt{2\left(9{,}81\, {}^{m}\!/\!{}_{s^2}\right)\left(200m\right)}$$
$$v_y = -62{,}6418\, {}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Por lo tanto la velocidad es:

$$v = \sqrt{\left(\mathrm{v_x}\right)^2 + \left(v_y\right)^2}$$
$$v = \sqrt{\left(44{,}44\, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2 + \left(-62{,}6418\, {}^{m}\!/\!{}_{s}\right)^2}$$
$$\underline{v = 76{,}8054\, {}^{m}\!/\!{}_{s}}$$

e) *Para obtener el ángulo del vector velocidad se tiene la ecuación:*

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_\mathrm{x}}$$

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_\mathrm{x}}$$

$$\theta = \arctan\frac{-171{,}4788\, {}^{m}\!/\!{}_{s}}{44{,}44\, {}^{m}\!/\!{}_{s}}$$

$$\underline{\theta = -75{,}47^\circ}$$

f) *La distancia horizontal recorrida estará relacionada con el tiempo de impacto , de manera que*

$$x = vt$$
$$x = \left(44,44\, {}^{m}\!/\!_{s}\right)(17,48s)$$
$$\underline{x = 776,8112m}$$

10.-Se dispara un proyectil formando un ángulo de 40^0 *, si el proyectil se impacta a una distancia horizontal de 5 Km , determinar:*

a) *La velocidad con la que salió disparado el proyectil.*

b) *El tiempo de vuelo del proyectil.*

c) *La mayor altura que alcanza el proyectil.*

d) *La velocidad en el momento en que la altura es máxima.*

SOLUCION:

Se conoce

$$\theta = 40^\circ$$
$$x = 5\ Km$$

a) *Para determinar la velocidad inicial se necesita despejar de alguna ecuación, en términos de las variables que se conocen , en este caso el ángulo de elevación y la distancia horizontal recorrida , entonces de la ecuación de la distancia recorrida :*

$$x = v_o \cos\theta t$$
$$t = \frac{x}{v_o \cos\theta}$$

Y de la ecuación de la altura en el eje vertical

$$h = h + v_{0y} + \tfrac{1}{2} gt^2$$

Sustituyendo la ecuación del tiempo en la ecuación de la altura

$$h = h_0 + v_0 sen\theta t + \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$h = h_0 + v_0 sen\theta\left(\frac{x}{v_o \cos\theta}\right) + \tfrac{1}{2} g\left(\frac{x}{v_o \cos\theta}\right)^2$$

Al sustituir los parámetros conocidos $h = 0, h_0 = 0, x = 5Km$, $g = -9,81 {}^{m}\!/_{s^2}, \theta = 40^\circ$ *tomando t como el tiempo de vuelo, la ecuación se reduce a*

$$v_0 sen\left(40^\circ\right)\left(\frac{5000m}{v_o \cos\left(40^\circ\right)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(-9,81 {}^{m}\!/_{s^2}\right)\left(\frac{5000m}{v_o \cos\left(40^\circ\right)}\right)^2 = 0$$

Y despejando la velocidad inicial

$$v_o = \sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}\left(9,81 {}^{m}\!/_{s^2}\right)\left(5000m\right)^2}{5000m \tan\left(40^\circ\right)\left(\cos\left(40^\circ\right)\right)^2}}$$

Realizando operaciones:

$$\underline{v_o = 223,1741 {}^{m}\!/_{s}}$$

b) *De la ecuación del tiempo en función de la velocidad inicial se obtiene el tiempo de vuelo*

$$t = \frac{x}{v_o \cos\theta}$$

$$t = \frac{5000m}{\left(223,1741 {}^{m}\!/_{s}\right)\cos\left(40^0\right)}$$

$$\underline{t = 29,2464s}$$

c) *Se puede conocer la altura máxima con varias ecuaciones , en este caso se emplea*

$$v_y{}^2 - v_{0y}^2 = 2gh$$

En el momento en que la altura es máxima

$$v_y = 0, g = -9,81 {}^{m}\!/_{s^2}, v_{0y} = v_0 sen\theta$$

$$h_{\max} = \frac{-\left(v_0 sen\theta\right)^2}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{-\left[\left(223,1741 {}^{m}\!/_{s}\right)\left(sen 40^0\right)\right]^2}{2\left(-9,81 {}^{m}\!/_{s^2}\right)}$$

$$\underline{h_{\max} = 1048.8737 {}^{m}\!/_{s}}$$

d) En el momento en que la altura es máxima la componente v_y de la velocidad es igual a cero de manera que la única componente es v_x, entonces $v = v_x$ y

$v = v_o \cos\theta$

$v = (223{,}1741\, m/s)(\cos 40^0)$

$\underline{v = 170{,}9592\, m/s}$

3.5 Ejercicios propuestos Capítulo III

M.R.U.

1.- Si un motociclista viaja hacia el norte durante 20 min a 75 km/h, se detiene durante 10 min y posteriormente continúa hacia el norte, recorriendo 50 km en 1,2 h. Determinar
a) Su desplazamiento total
b) Su velocidad media.

2.-A lo largo de una autopista recta viajan dos automóviles en la misma dirección el primero va a 80 km/h y el otro a 120 km/h., si se supone que parten desde el mismo punto calcular :
a) La ventaja con la que el auto más rápido llega a un destino a 50 km de distancia.
b) La rapidez a la que debe viajar el automóvil más veloz para llevar 10 min de ventaja con respecto a la velocidad del más lento.

3.-. Una motocicleta un viaje de 125 km a una rapidez media de 60 km/h. Un automóvil que inició el viaje 1 h después llega al mismo destino al mismo tiempo. ¿Cuál fue la rapidez media del automóvil durante el periodo que estuvo en movimiento?

4.-. Una tortuga puede desplazarse a 10 cm/s, y una liebre puede correr 20 veces más rápido. En una carrera, los dos corredores inicial al mismo tiempo, pero la liebre se detiene a descansar durante 2 min y, por ello, la tortuga gana por un 20 cm. Determinar:
a) El tiempo de duración de la carrera.
b) La distancia recorrida.

5. -Un tren y automóvil se mueven al mismo tiempo a lo largo de trayectorias paralelas a 25 m/s. Debido a una luz roja, el auto experimenta una aceleración uniforme de –2,5 m/s^2 y se detiene. Permanece en reposo durante 45 s, después acelera hasta una velocidad de 25 m/s con una aceleración de 2,5 m/s^2. ¿A qué distancia del tren está el auto cuando alcanza la velocidad de 25 m/s, suponiendo que la velocidad del tren se ha mantenido?

6.- Una pelota se deja caer sobre la parte superior de un plano inclinado y se desliza hacia abajo con aceleración constante. El plano inclinado tiene 2 m de largo, y la pelota dura 3 s en alcanzar la parte inferior. Calcular :
a) La aceleración de la partícula.
b) La velocidad al momento de encontrarse en la parte baja del plano.
c) El tiempo que tarda la pelota en alcanzar el punto medio del plano inclinado.
d) Su velocidad en el punto medio del plano.

7. Un auto que se mueve a 35 mi/h necesita 40 pies como distancia mínima para detenerse. Calcular las distancia mínima para el mismo auto pero que ahora se mueve a 70 mi/h, y con la misma aceleración.

8. Dos autobuses parten del mismo punto y cubren la misma ruta partiendo con una diferencia de 15 min. Cada uno es capaz de alcanzar una velocidad máxima de 140 km/h partiendo del

reposo después de acelerar uniformemente una distancia de 2,5 km. Calcular:
a) La aceleración de cada autobús.
b) La distancia a la que se encuentra el primer autobús cuando sale el segundo.
c) La distancia a la que se encuentran separados si ambos viajan a la velocidad máxima.

9.- Se dispara en línea recta a través de una tabla de 14 cm de espesor, una bala de 3 cm de longitud. Si la bala entra en la tabla con una velocidad de 400 m/s y sale con una velocidad de 300 m/s. Determinar:
a) La aceleración de la bala a través de la tabla.
b) El tiempo total que la bala está en contacto con la tabla.
c) El espesor que debe tener la tabla para detener la bala.

10.- Se dirigen dos trenes en la misma recta horizontal uno lleva una velocidad de 96,6 km/h y el otro una velocidad de 128 km/h, cuando están a una distancia de 3.22 km, ambos conductores observan de manera simultánea al tren que se les acerca y aplican frenos. Si los frenos retardan a ambos trenes a razón de 0,915 m/s^2, diga si chocarán.

Caída libre

1.- Un bulto resbala por accidente desde 44m en lo alto de un edificio, aterrizando sobre una caja metálica, la cual se hundió hasta una profundidad de 45 cm, si se ignora la resistencia del aire, calcular:
a) La velocidad del bulto exactamente antes de chocar con la caja metalica,
b) La aceleración promedio del bulto mientras está en contacto con la caja.
c) El tiempo que tarda en hundir la caja.

2. Si se lanza directamente hacia abajo una piedra con una velocidad inicial de 15 m/s desde una altura de 20m determinar el tiempo en que la piedra golpea el suelo.

3. -Se lanza un objeto hacia arriba de manera vertical a una velocidad inicial de 14,5 m/s. Calcular)
a) El tiempo para que el objeto alcance su altura máxima.
b) La altura máxima.
c) La velocidad y la aceleración del objeto a 1,6 s.

4. Desde acantilado de 30 m de altura se lanzan dos pelotas verticalmente hacia una corriente de agua, con una diferencia de tiempo de 1 s y puede notarse que producen un solo sonido al golpear el agua. La primera pelota tiene una velocidad inicial de 3 m/s, determinar
a) La diferencia de tiempo con que deben soltarse la segunda pelota con respecto a la primera.
b) El tiempo de que tardan en golpear el agua después de soltarse la primera pelota.
c) La velocidad inicial de la segunda pelota si las dos golpean el agua en forma simultánea?
d) La velocidad de cada piedra en el instante en que golpean el agua.

5.-Un bateador falla al golpear la pelota de manera que viaja en línea recta hacia arriba. Un aficionado observa que son necesarios 4 s para que la pelota alcance su altura máxima. Determinar:
a) La velocidad con la que se golpea la pelota.
b) La altura máxima alcanzada por la pelota.

6.-. Desde una altura de 2 m se deja caer una pelota. La pelota rebota y en el primer rebote la pelota alcanza una altura de 1,85 m, donde es atrapada. Determinar la velocidad de la pelota:
a) En el momento en que hace contacto con el suelo.

b) Cuando se aleja del suelo en el rebote.
c) Determinar el tiempo total desde el momento en que se suelta hasta ser atrapada, ignorar el tiempo de contacto con el suelo.

Movimiento en dos dimensiones
1.- Un proyectil es lanzado por un cañón a una velocidad de 95 m/s, de manera que forma 55° con la horizontal. Determinar:
a) La altura máxima a la cual asciende el proyectil
b) El alcance horizontal máximo.
c) Las componentes de la velocidad y el ángulo formado por la velocidad con respecto a la horizontal.

2.-Por el borde de uno de los escalones de una escalera rueda una pelota con una velocidad horizontal de 2 m/s. Los escalones son de 0,3 m de alto y 0,25 m de ancho. ¿En cuál escalón pegará la pelota por vez primera?

3.- Una bala es disparada a 400 m/s por un rifle hacia un objeto situado a 42 m de distancia. Calcular la altura a la que debe elevarse el rifle para que la bala dé en el blanco.

4.-. Un pateador de fútbol americano golpea la pelota con velocidad inicial de 20 m/s con 45° de elevación; a 55 m de él en la línea de meta un jugador corre en ese mismo instante hacia la pelota. ¿Cuál debe ser su velocidad para que pueda alcanzar la pelota antes de que ésta caiga al suelo?

5.- Una pelota es golpeada por un bateador que le pega a una altura de 1,3 m sobre el suelo, y con una elevación de 45º y pelota tiene un alcance de 110,7 m de distancia ,yendo por una de las bandas en dirección de un jugador situado a 98 m del bateador salta alcanzando 2,70 m de altura. ¿Atrapará el jugador la pelota?

6.- Un avión vuela a 190 km/h en dirección horizontal a 2000 m de altura, el piloto debe dejar caer un paquete a un grupo de personas.
a) ¿Cuántos metros antes de llegar sobre el grupo debe dejar caer la bolsa?
b) ¿Dónde habría caído la bolsa si se hubiera dejado caer en el instante en que pasa sobre el grupo?

7. Sobre la superficie de una mesa se empuja un vaso el cual cae de ella golpeando el piso a 1,6 m de la base de la misma. Si la altura de la mesa es 0,94 m, determinar:
a) La velocidad con la cual el vaso abandonó la mesa.
b) la dirección de la velocidad del vaso justo antes de chocar el piso.

CAPÍTULO IV

DINÁMICA

Se denomina fuerza al resultado de la interacción entre un objeto y su medio circundante. La fuerza que actúa sobre un cuerpo puede deformarlo, cambiar su estado de movimiento, o ambas cosas. Las denominadas fuerzas de contacto no son más que una descripción macroscópica de fuerzas que se manifiestan en el contacto mecánico de objetos. Aunque estas fuerzas son la manifestación total, a gran escala, de las fuerzas electromagnéticas entre gran número de átomos, sirven tan bien para describir la mayor parte de las interacciones comunes en los fenómenos mecánicos, que merecen una categoría por sí mismas.

A la mecánica clásica corresponde el estudio de las primeras interacciones encontradas en la naturaleza. Dichas interacciones satisfacen tres leyes o principios, las cuales fueron enunciadas por Isaac Newton y resumen la dinámica de traslación.

Leyes de Newton

Primera ley de Newton

Ambiguamente se pensaba que se necesitaba alguna influencia, interacción o fuerza para conservar el movimiento de un cuerpo. Se creía que se encontraba en su estado natural cuando estaba en reposo. Se pensaba, por ejemplo, que para poner en movimiento al cuerpo con velocidad constante, tenía que impulsarlo continuamente un agente externo; de otra manera se detendría. Sin embargo, al experimentar usando un bloque más liso y una superficie más lisa cada vez. Se encontró que el bloque disminuía su velocidad con mayor lentitud y cada vez llegaba más y más lejos. Extrapolando al caso ideal, el cuerpo seguirá indefinidamente en línea recta con velocidad constante.

Por lo tanto la ley de inercia o primera ley afirma que si sobre un cuerpo la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, el cuerpo estará en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme (M.R.U.), únicos estados en los que no varía su velocidad (su aceleración es nula). Esta ley, también llamada ley de inercia, (y las otras dos) sólo es válida si el observador está en un marco de referencia inercial, es decir, un sistema de referencia inercial es aquél en el que un cuerpo no sometido a interacciones está en reposo o en M.R.U. Serán sistemas de referencia inerciales todos aquellos que sean fijos o los que posean velocidad constante respecto de los fijos. La Tierra no es un marco inercial pero podemos considerar, para movimientos en torno a la Tierra, que los sistemas fijos a la Tierra son también inerciales.

Masa inercial. Segunda Ley de Newton,

La resistencia de un cuerpo a cambiar su estado de reposo o movimiento se llama inercia. La masa es un término que se utiliza para cuantificar la inercia. Así entre dos cuerpos a los que se les aplica una misma fuerza se acelerará más aquél que posea menos masa (presenta una oposición menor a cambiar su estado de movimiento). En el sistema internacional, la masa se mide en [Kg].

Por otro lado, la segunda ley de Newton es un resultado experimental en la cual entran en juego tres variable a saber: masa (m), aceleración (a) y fuerza (F).

Suponiendo que tenemos un bloque de masa m sobre una superficie lisa, al cual se le aplica una interacción o fuerza F. Se ha encontrado que la aceleración es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa, es decir:

$$a \alpha \frac{F}{m} \Leftrightarrow F \alpha ma$$

Así que la fuerza puede expresarse como:

$$F = ma$$

En el sistema internacional de unidades, la unidad de fuerza es el Newton [N], $1N = {}^{Kgm}\!/\!{}_{s^2}$ *., 1[N] es la fuerza que hay que aplicar a un cuerpo de masa 1 [kg] para que este adquiera una aceleración de 1[m/s2].En el sistema ingles la unidad de fuerza es la libra, tal que* $1lbf = 1,449N$ *. En el sistema C.G.S., la unidad de fuerza es la dina, tal que* $1dina = {}^{gcm}\!/\!{}_{s^2} = 10^5 N$ *.*

La fuerza resultante que se ejerce sobre una partícula es proporcional a la aceleración que se produce en ella, siendo la constante de proporcionalidad la masa inercial. Si definimos ahora la cantidad de movimiento o momentum lineal $\vec{p}$ *como el producto de la masa de la partícula por su velocidad, tendremos la segunda ley expresada de la siguiente manera:*

$$\vec{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Donde puede notarse que las únicas causas que hacen variar el momentum lineal de una partícula es la fuerza resultante aplicada sobre la misma.

Tercera Ley de Newton

Cuando dos partículas interaccionan entre sí, la fuerza que hace la partícula 1 sobre 2 F_{12}*, es igual en módulo y dirección pero de sentido contrario a la que hace 2 sobre 1* F_{21} *,* $F_{12} = -F_{21}$ *. Es decir, las fuerzas en la naturaleza se presentan por pares, fuerza de acción y fuerza de reacción. Es conveniente decir que no todas las fuerzas de igual módulo y dirección pero de sentido contrario son fuerzas de acción y reacción de momento se ha de tener en cuenta que estas fuerzas actúan sobre cuerpos diferentes*

Fuerzas de fricción:

El hecho de que un cuerpo arrojado en una mesa, al cabo de cierto tiempo se detenga, conlleva a que sobre el cuerpo interviene una resistencia contraria al movimiento. Como esta resistencia produce una disminución en la velocidad de cuerpo, esta se cuantifica mediante una fuerza. Esta fuerza se denomina de fricción o roce (f).

Clasificación:

Las fuerzas de fricción que obran entre superficies en reposo, una con respecto a la otra, se llaman fuerzas de fricción estática. La máxima fuerza de fricción estática será igual a la mínima fuerza necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que el movimiento comienza, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies ordinariamente disminuyen, de tal manera que basta una fuerza menor para conservar el movimiento uniforme. Las fuerzas que obran entre las superficies en movimiento relativo se llaman fuerzas de fricción cinética o dinámica.

1.-. Para dos tipos dados de superficie cualquiera que estén secas y no lubricadas,

experimentalmente se encuentra que la máxima fuerza de roce estática entre ellas, es decir, *cuando el cuerpo está a punto de moverse, es aproximadamente independiente del área de contacto entre amplios límites, pero es proporcional a la fuerza normal N que mantiene en contacto a las dos superficies, es decir,* $f_e \alpha N$ *o bien:*

$$f_e = \mu_e N$$

donde μ_e *es la constante de proporcionalidad llamada coeficiente de roce estático y la ecuación anterior es la expresión para la fuerza de fricción cuando el cuerpo está a punto de moverse.*

2.-Para dos tipos de superficies dadas que están secas y no lubricadas, se encuentra que la fuerza de fricción cinética es aproximadamente independiente del área de contacto y que tampoco depende del estado de movimiento del cuerpo, entre amplios límites, pero es proporcional a la fuerza normal de contacto N que mantiene a las superficies en contacto. Si f_c *representa la magnitud de la fuerza de roce cinética, se puede escribir:*

$$f_c = \mu_c N$$

donde μ_c *es el coeficiente de roce cinético.*

Observaciones:

1.-Tanto los coeficientes μ_c, μ_e *son coeficientes adimensionales que dependen de la naturaleza de ambas superficies de contacto, siendo mayores en superficies ásperas o rugosas y menores, en general, si son lisas.*

2.- Las fuerzas de fricción cinética y por ende el coeficiente de rozamiento cinético dependen de la velocidad relativa entre las superficies en contacto, a mayor velocidad este disminuye.

3.-se puede considerar a los coeficientes de fricción como constantes y dependen de muchas variables, como son la naturaleza de los materiales, el acabado de las superficies, películas en las superficies, temperatura y grado de contaminación.

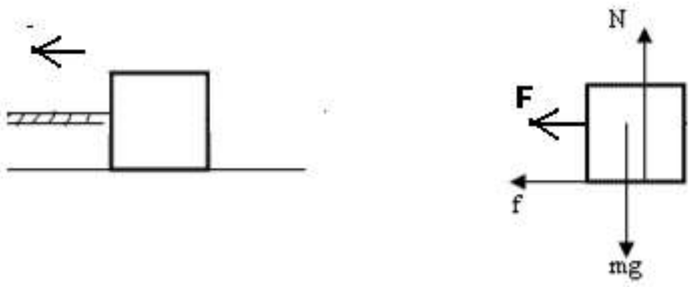
4.1 Diagramas de cuerpo libre

Un diagrama de cuerpo libre o cuerpo aislado es aquél que muestra el total de fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Es importante verificar que el diagrama esté correcto antes de aplicar la segunda ley de Newton.

En este tipo de diagramas, un objeto o cuerpo se aísla y se reemplazan los elementos actuantes sobre él como pueden ser cuerdas, superficies u otros elementos por flechas que indican las direcciones de los elementos actuantes sobre el objeto. Deben representarse también la fuerza de fricción y la de gravedad. En el caso de que hubiera más cuerpos interviniendo con las fuerzas se debe realizar un diagrama de cada uno por separado de cada uno de ellos.

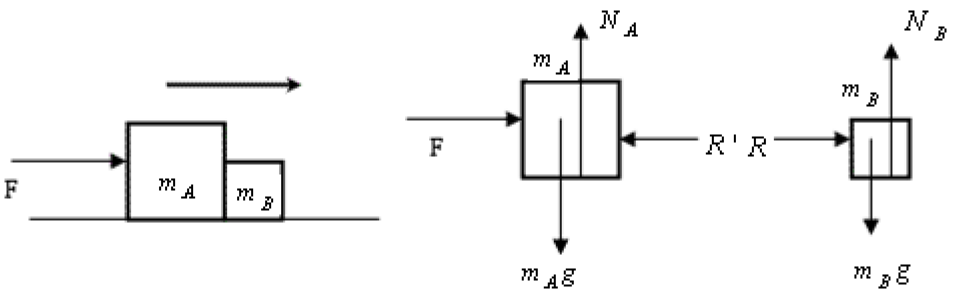
Algunos ejemplos comunes de sistemas de fuerzas actuando sobre un cuerpo se indican a continuación; N es la fuerza normal al peso, mg el peso, f la fuerza de fricción y T o F la fuerza transmitida por la cuerda.

1.-Diagrama de cuerpo libre de un objeto arrastrado a la izquierda por una cuerda, sobre una superficie rugosa (por esa razón aparece la fuerza de fricción f, sobre una superficie idealmente lisa f no existiría).

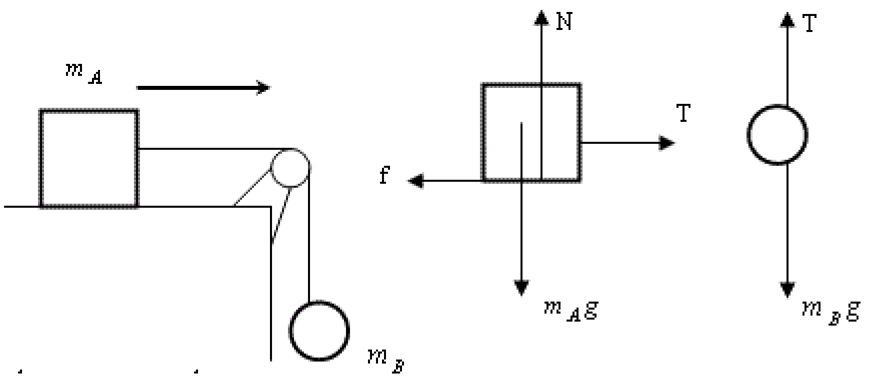


2.- Diagrama de cuerpo libre de un bloque empujado hacia abajo sobre una superficie rugosa.

3.-Diagrama de cuerpo libre de dos bloques en contacto empujados a la derecha sobre una superficie lisa (sin fricción). Las fuerzas R y R’ son un par de acción y reacción, R’ es la fuerza que el bloque m_B hace sobre el bloque m_A y es igual en magnitud pero de sentido contrario a la fuerza R , que es la que hace m_A sobre m_B , entonces R=-R’.



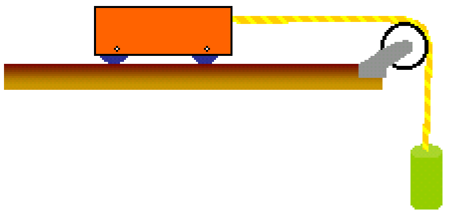
4.-Diagrama de cuerpo libre de dos masas en contacto por medio de una cuerda, la superficie es rugosa y no hay fricción originada por la cuerda.



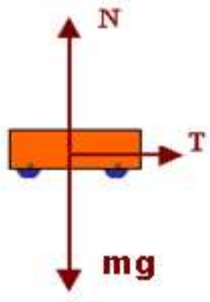
4.2 Ejercicios de diagramas de cuerpo libre

Representar el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los casos

1) El sistema representado en la figura, está formado por un carro de masa m *conocida sobre una superficie horizontal unido mediante una cuerda flexible; no elástica y de masa despreciable a un cuerpo de masa también conocida que pende de uno de los extremos de la cuerda.*

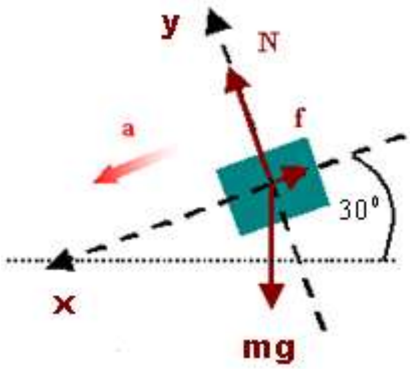


SOLUCIÓN

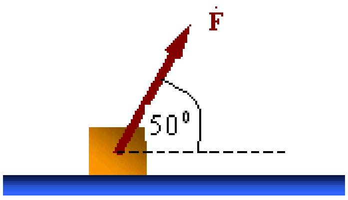


Ejercicio 2) Un cuerpo que desciende por un plano inclinado 30° respecto a la horizontal, con una aceleración conocida y una superficie rugosa.

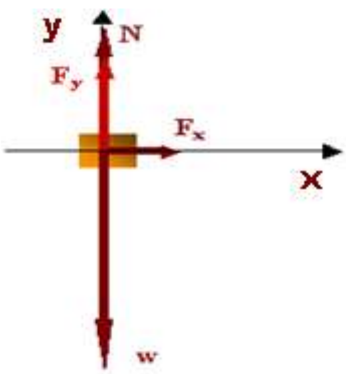
SOLUCIÓN



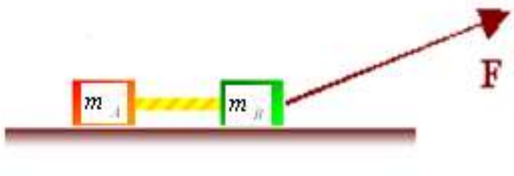
3) A un cuerpo de masa conocida se le aplica una fuerza F formando un ángulo de 50° respecto a la mesa como.



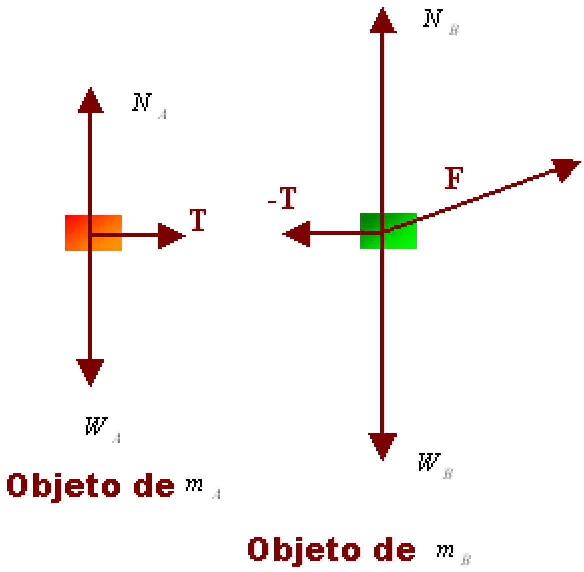
SOLUCIÓN



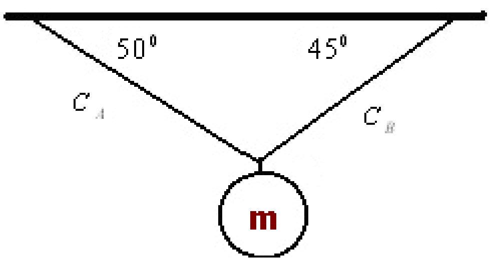
4) Un sistema formado por dos cuerpos de masas conocidas m_A *y* m_B *unidos por una cuerda no elástica de masa despreciable, sobre el que actúa una fuerza constante F formando una ángulo de 20° respecto a la horizontal.*



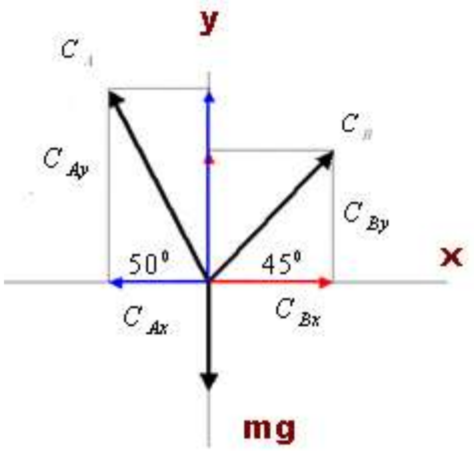
SOLUCIÓN



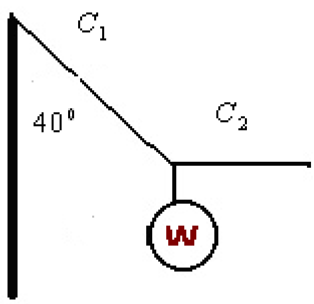
5) Un cuerpo esférico de peso conocido pendiendo de dos cuerdas con los ángulos indicados en la figura.



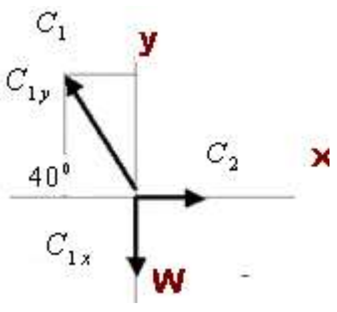
SOLUCIÓN



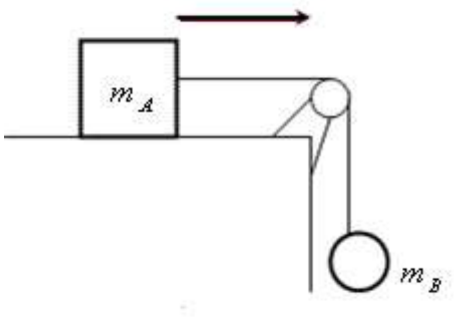
6) Una esfera de peso conocido pendiendo de una C_1 tirada hacia un lado en forma horizontal mediante otra cuerda C_2 sostenida de modo tal la cuerda C_1 forma un ángulo de 40^0 con el poste.



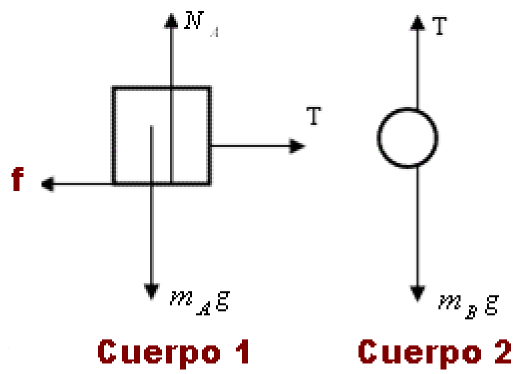
SOLUCIÓN



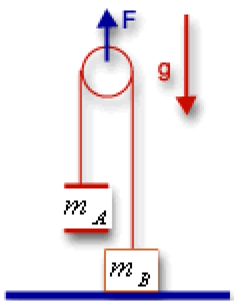
7) Dos cuerpos de masa conocida unidos por una cuerda sobre una superficie rugosa y una polea sin fricción.



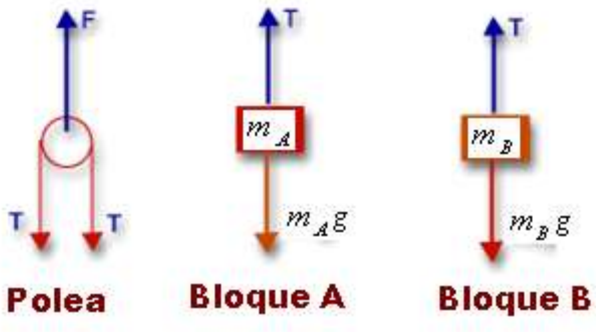
SOLUCIÓN



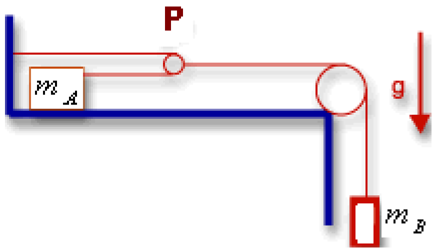
8) La figura que representa dos bloques de masa conocida unidos por un cable de masa despreciable que pasa a través de una polea sin masa, la cual está siendo levantada hacia arriba por una fuerza F. Considere que la polea y el cable carecen de masa.



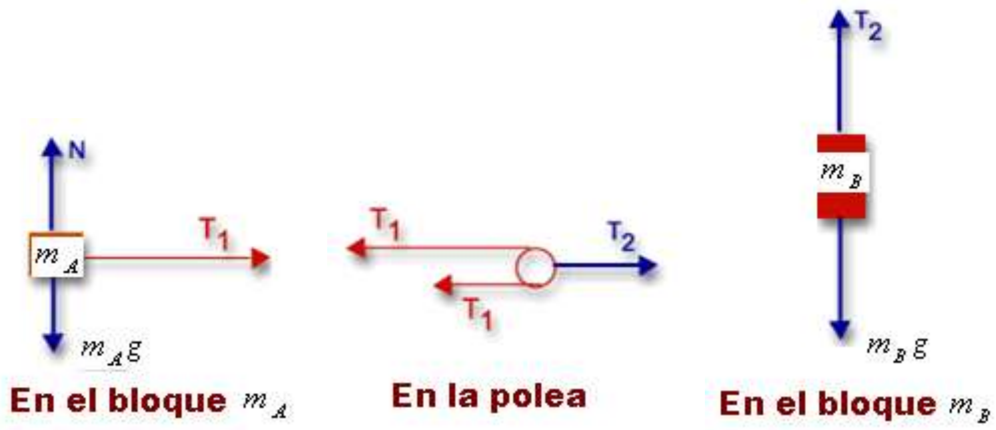
SOLUCIÓN



9) El sistema donde de la figura considerando m_A *y* m_B *masas unidas por una polea P,despreciar el peso de las cuerdas y de las poleas.*

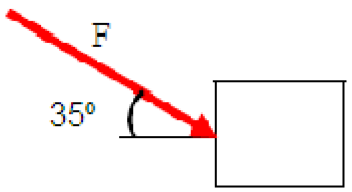


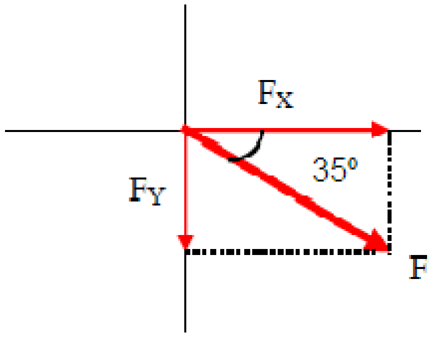
SOLUCIÓN



4.3 Ejercicios de leyes de Newton

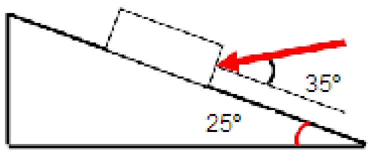
1.- Un objeto es empujado sobre el piso por una fuerza de 35 kg que forma un ángulo de 35^0 con la horizontal. Encontrar las componentes horizontal y vertical.

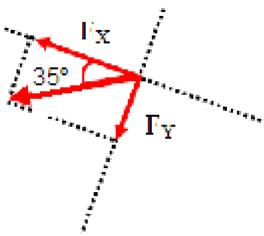




$F_X = F \cos 35$
$F_X = 35 \cos 35$
$F_X = 28{,}67$ Kg.
$F_Y = F \text{ sen } 35$
$F_Y = 35\ (0{,}5735)$
$F_Y = 20{,}075$ Kg

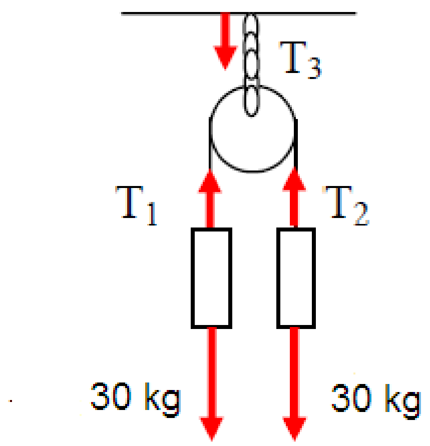
2.-Un peso es levantado por un plano inclinado 25^0 mediante una fuerza F que forma un ángulo de 35^0 con el plano.
a) Qué fuerza F es necesaria para que la componente F_X paralela al plano sea de 14 Kg.
b) Cuanto valdrá entonces la componente F_Y





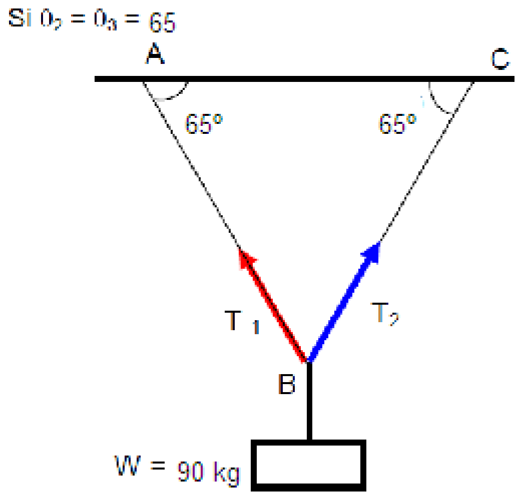
a) $F_X = 14$ Kg
$F_X = F \cos 35$
$14 = F \cos 35$
$14 = F\ (0{,}8191)$
F = 17,091 Kg.
b) $F_Y = F \text{ sen } 35$
$F_Y = 17{,}091(0{,}5)$
F_Y = 9,80 Kg.

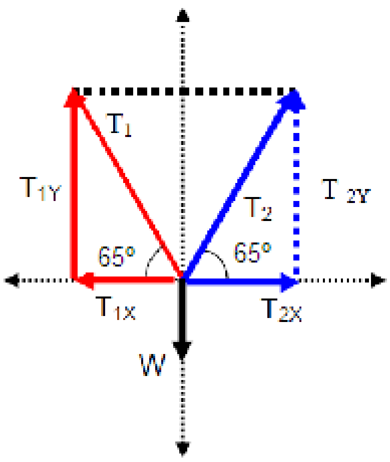
3.-Dos bloques de 30 kg están colgando en los extremos de una cuerda que pasa por una polea ligera sin rozamiento. La polea está sujeta a una cadena que esta suspendida del techo.
a) Calcular la tensión de la cuerda.
b) Calcular la tensión de la cadena.



T_3 = tensión de la cuerda
$T_1 = 30$ Kg.
$T_2 = 30$ kg.
$\Sigma F_Y = 0$
$T_1 + T_2 - T_3 = 0$
$T_1 + T_2 = T_3$
$T_3 = 30$ kg. + 30 kg.
$T_3 = 60$ kg.

4.- El peso del bloque es 90 kg. Calcular las tensiones T_2 y T_3
Si $\theta_2 = \theta_3 = 65$





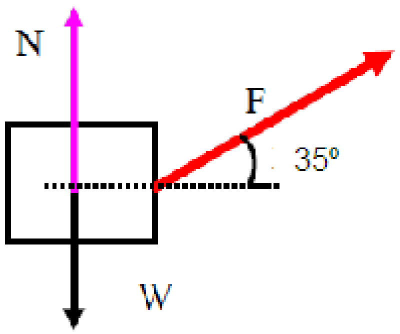
$T_{1Y} = T_1$. sen 65
$T_{2Y} = T_2$. sen 65
$T_{2X} = T_2$. cos 65
$T_{1X} = T_1$. cos 65
$\Sigma F_X = 0$
$T_{2X} - T_{1X} = 0$ (Ecuación 1)
$T_{2X} = T_{1X}$
T_2 . cos 65 = T_1 . cos 65
$T_2 = T_1$
$\Sigma F_Y = 0$
$T_{1Y} + T_{2Y} - W = 0$ (Ecuación 2)

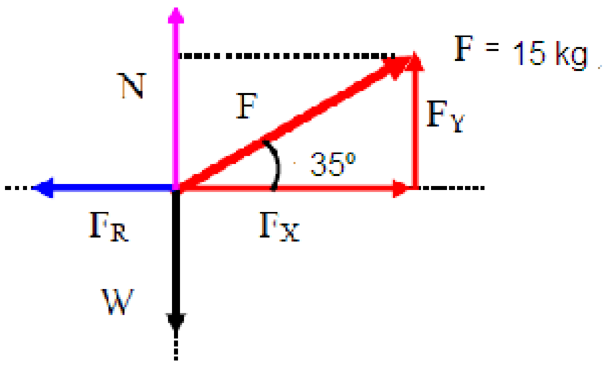
$T_{1Y} + T_{2Y} = W$ pero: W = 90 kg.
T_1 . sen 65 **+** T_2. sen 65 = 90 (Ecuación 2)
Reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2
T_1 . sen 65 **+** T_2. sen 65 = 90
T_1 . sen 65 **+** **(**T_1). Sen 65 = 90
$2T_1$. sen 65 = 90

$$T_1 = \frac{90}{2sen65^0}$$

T_1 = 49,652 kg
$T_2 = T_1$
T_2 = 49,652 kg

5.-Una caja es jalada hacia la derecha a velocidad constante por una fuerza de 15 kg. que actúa formando un ángulo de 35^0 por encima de la horizontal. El coeficiente cinético de rozamiento entre la caja y la superficie es 0,5.
Calcular cuál es el peso de la caja. Asúmase que todas las fuerzas actúan en el centro del bloque.





$$\sum F_x = 0$$

$F_R - F_X = 0$ (Ecuación 1)
$F_R = F_X$
Pero: F_X = F cos35
F_X = 12,28 kg.
Pero F_R = 12,28 Kg F_X
$F_R = \mu$ N (Ecuación 2)

$$F_R = F_x = \mu N$$

$$N = \frac{F}{\mu} = \frac{12,28}{0,5}$$

N = 24.56 kg.

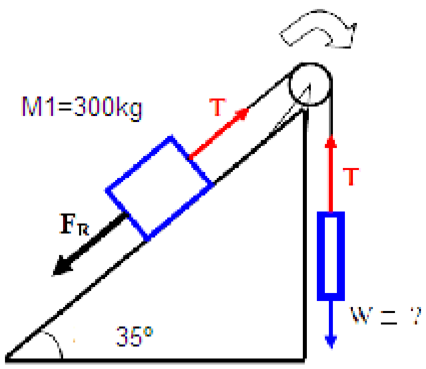
$$\sum F_y = 0$$

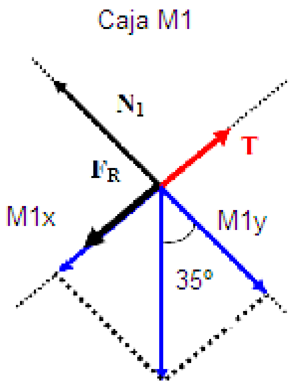
$N + F_Y - W = 0$ (Ecuación 3)
Pero: F_Y = F sen 35
F_Y = (15) (0,5735)

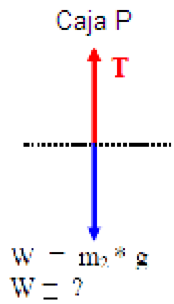
$F_Y = 8,60$ Kg.
Reemplazando en la ecuación 3
$N + F_Y - W = 0$

Pero: $F_Y = 8,60$ Kg. $N = 24,56$ kg.
$W = N + F_Y$
$W = 8,60 + 24,56 = 33,16$ kg.
W = 33,16 Kg.

6.- Una caja que pesa 300 kg se pone sobre un plano inclinado de 35^0 y se conecta a una segunda caja de peso W pendiente de una cuerda que pasa por una pequeña polea sin rozamiento. El coeficiente estático de rozamiento es 0,4 y el coeficiente cinético 0,3.
a) Calcular el peso W para el cual el bloque de 300 kg se eleva por el plano a velocidad constante.







$M_1 = m_1\, g$

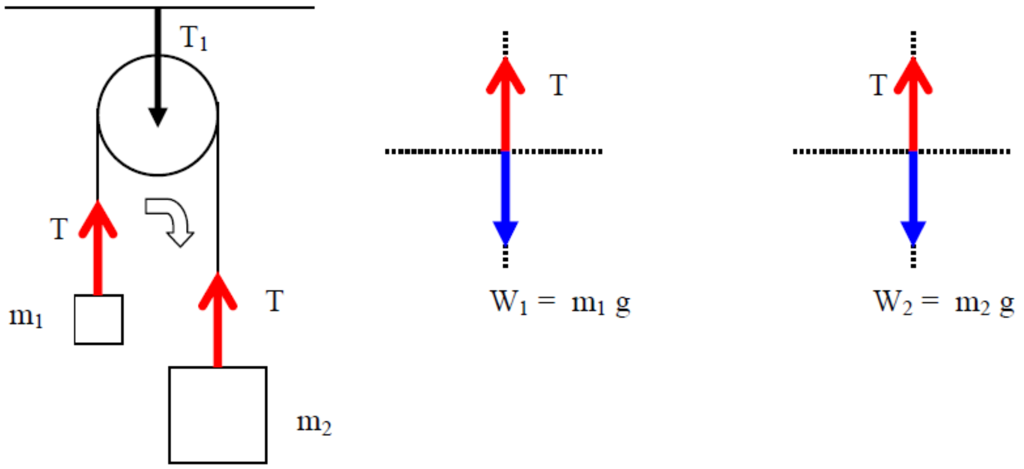
$M_1 = 100$ kg

.
Bloque $M_1 = 300$ Kg.
$\Sigma F_X = 0$
$T - M_{1X} - F_R = 0$ (Ecuación 1)
Pero: $M_{1X} = M_1 \text{ sen } 35$
$P_{1X} = (300)(0,5735)$
$M_{1X} = 172,05$ kg.
Pero: $M_{1Y} = M_1 \cos 35$
$P_{1Y} = 300\ (0,8191)$
$M_{1Y} = 245,73$ Kg.
$\Sigma F_Y = 0$
$N_1 - M_{1Y} = 0$ (Ecuación 2)
$N_1 = M_{1Y}$
$N_1 = 245,73$ Kg.
$F_R = \mu_C\ N_1$ (Ecuación 3)
$\mu_C = 0,3$ (Coeficiente cinético de rozamiento)
$F_R = (0,3)(245,73)$

$F_R = 73{,}719$ Kg.
Para hallar la tensión en la cuerda se reemplaza en la ecuación 1.
$T – M_{1X} – F_R = 0$ (Ecuación 1)
Entonces: $M_{1X} = 172{,}05$ kg. $F_R = 73{,}719$ Kg.
$T = M_{1x} + F_R = 0$

$T = 172{,}05 + 73{,}719$
$T = 245{,}769$ Kg.
CAJA W
$\Sigma F_Y = 0$ (por que se desplaza a velocidad constante)
$T – W = 0$
$T = W$ (Ecuación 4)
Pero $T = 245{,}769$ Kg.
W = 245,769 Kg.

7.-Un objeto de 12 kg y otro de 24 kg están suspendidos en los extremos opuestos de una cuerda que pasa por una polea. Calcular:
a) La aceleración del sistema. b) La tensión de la cuerda. c) La tensión de la cuerda que sostiene la polea. Desprecie el peso de esta.



$\Sigma F_Y = m_1 a$
$T - m_1 g = m_1 a$ (Ecuación 1)
$\Sigma F_Y = m_2 a$
$m_2 g - T = m_2 a$ (Ecuación 2)
Sumando las ecuaciones
$T - m_1 g = m_1 a$ (Ecuación 1)
$m_2 g - T = m_2 a$ (Ecuación 2)
$m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a$
$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2) a$
$(24)(9{,}8) – (12)(9{,}8) = (24 + 12) a$
$235{,}2 – 117{,}6 = 36 a$
$78{,}4 = 24 a$
$a = 3{,}266 \text{ m/seg}^2$
Se sustituye en la ecuación 1 para encontrar la tensión
$T - m_1 g = m_1 a$ (Ecuación 1)
$T = m_1 a + m_1 g$
$T = 12 * 3{,}266 + 12 * 9{,}8$

$T = 39{,}192 + 117{,}6$

$T = 156{,}792$ Newton

$T_1 = 2\ T = 2\ (156{,}792)$

$T_1 = 313{,}584$ Newton.

4.4 Ejercicios propuestos Capítulo IV

1.-Se tira de un carrito de 50 kg de masa con una fuerza de 145 N cuya dirección forma un ángulo de 20º con la horizontal hacia arriba. Si el coeficiente de fricción es de 0,05:
a) Realizar el diagrama de flujo de las fuerzas sobre el carrito.
b) Calcular las componentes de la fuerza aplicada en la dirección del movimiento y en la dirección perpendicular a la misma.
c) Determinar la aceleración con que se mueve el carrito.
d) Calcular la posición del carrito y su velocidad a los 3 s.

2.- Un coche de 1450 kg va a 85 km/h por una carretera y frena hasta pararse en 14 segundos ¿Qué fuerza le ha aplicado los frenos?

3.- Una fuerza de 60 N actúa sobre un cuerpo de masa 15 g durante 14 s, el cual inicia su movimiento desde el reposo, ¿Qué espacio recorrerá el cuerpo en ese tiempo?

4.- Un ascensor de 300 kg de masa parte del reposo hasta alcanzar la velocidad de 1 m/s en 2 s. Después mantiene la velocidad constante durante 8 segundos. Para frenar, lo hace hasta pararse en 3,3 segundos. Calcular:
a) La fuerza que hacen los cables en cada una de las etapas. Y representar el diagrama de flujo.
b) La altura que ha subido el ascensor.

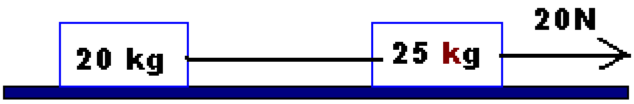
5.- En un plano horizontal liso sin rozamiento descansa un bloque de 16 kg. Calcula la aceleración del cuerpo cuando actúa sobre él una fuerza de 12 N, cuya dirección forma un ángulo con la horizontal de 34º.

6.- Un cuerpo de masa 120 kg que se mueve a una velocidad de 25 m/s se para después de recorrer 75 m en un plano horizontal con rozamiento. Calcula el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

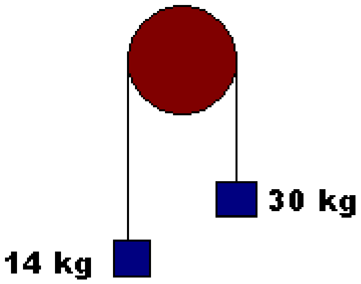
7.- Sobre una superficie horizontal se desliza un cuerpo de 15kg mediante una cuerda que pasa por una polea fija y lleva colgando del otro extremo un peso de 70 N. Calcular:
a) la aceleración si no hay rozamiento.
b) la aceleración si el coeficiente de rozamiento es 0,08.

8.- Se pretende subir un objeto de 250 kg por un plano inclinado 35º con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,5, calcular:
a) El valor de la fuerza de rozamiento.
b) La fuerza que debería aplicarse al cuerpo para que ascendiera por el plano a velocidad constante.

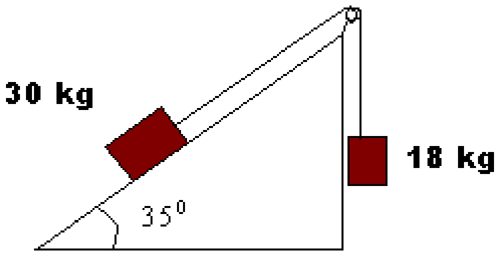
9.- Calcula la aceleración y la tensión de la cuerda en los siguientes casos:
a)



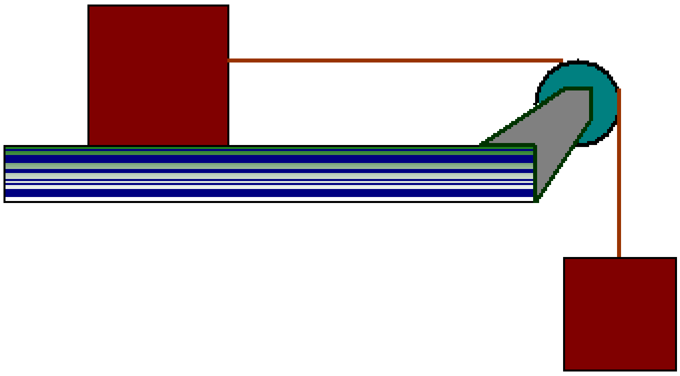
b)



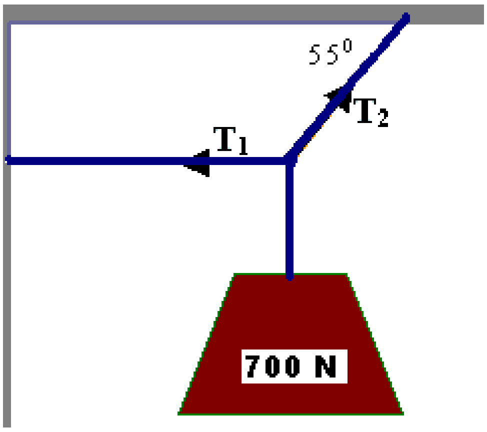
c)



10.- Un bloque de 9,2 kg, se conecta por una polea de peso despreciable por una cuerda a un bloque de 16,2 kg que se encuentra sobre una mesa plana. Si el coeficiente de roce durante el deslizamiento es 0,2, encuentre la tensión en la cuerda.



11.- Para la figura mostrada determinar los valores de T_1 y T_2, si el peso del objeto es de 700N.


55°
T2
T1
700 N

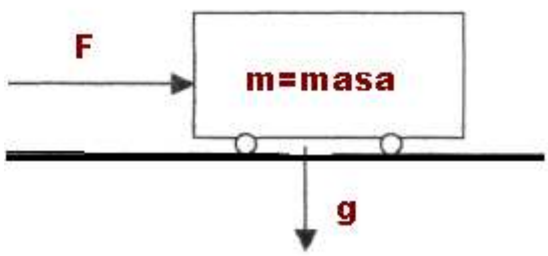
CAPÍTULO V

TRABAJO Y ENERGÍA

La energía es una propiedad relacionada con los procesos de transformación en la naturaleza. No pueden realizarse procesos físicos, químicos o biológicos sin energía. Cuando la forma de energía asociada a las transformaciones de tipo mecánico se denomina energía mecánica y su transferencia de un cuerpo a otro recibe el nombre de trabajo. Ambos conceptos permiten estudiar el movimiento de los cuerpos de forma más sencilla que usando términos de fuerza, a partir de las
leyes de Newton, y constituyen, por ello, elementos clave en la descripción de los sistemas físicos.
La Dinámica estudia el movimiento atendiendo a las causas que lo originan relacionando las fuerzas con las características del movimiento, tales como la posición y la velocidad. Es posible, no obstante, describir la condición de un cuerpo en movimiento introduciendo una nueva magnitud, la energía mecánica, e interpretar sus variaciones mediante el concepto de trabajo físico. Ambos conceptos surgieron históricamente en una etapa avanzada del desarrollo de la dinámica y permiten enfocar su estudio de una forma por lo general más simple.
El estudio del equilibrio, del movimiento y la relación que guardan con las fuerzas y con la energía, definen un amplio campo de estudio que se conoce con el nombre de mecánica. La mecánica engloba la cinemática o descripción del movimiento, la estática o estudio del equilibrio y la dinámica o explicación del movimiento. El enfoque en términos de trabajo y energía complementa el conjunto de la mecánica como parte fundamental de la física.
La Energía

Para poder facilitar el estudio de los sistemas materiales se introduce el concepto de energía, la naturaleza es esencialmente dinámica, es decir, está sujeta a cambios: cambios de posición, cambios de velocidad, cambios de composición o cambios de estado físico, por ejemplo. Existe algo que subyace a los cambios materiales y que indefectiblemente los acompaña; ese algo constituye lo que se entiende por energía. La energía es una propiedad o atributo de todo cuerpo o sistema material en virtud de la cual éstos pueden transformarse modificando su situación o estado, así como actuar sobre otros originando en ellos procesos de transformación. Entonces todos los cambios materiales están asociados con una cierta cantidad de energía que se pone en juego, recibiéndola o entregándola.

5.1 Trabajo, energía cinética y momentum lineal:
Considere un bloque de masa m en un movimiento rectilíneo causado por la aplicación de una fuerza constante F. Si se le aplica una fuerza durante un intervalo de tiempo al bloque la variación de la cantidad de movimiento o momentum lineal del bloque es siempre la misma, independiente
de la masa.



Si se va a trasladar el bloque una distancia dada, desde un valor de x inicial hasta un punto de coordenada x, partiendo desde el reposo. Para recorrer la distancia x, un bloque con menor masa empleará un tiempo menor que otro con mayor masa. De esta forma la fuerza F suministra un momentum lineal mayor al cuerpo con mayor masa, a diferencia del primer caso, es decir, cuando el intervalo de tiempo era fijado a un valor dado.

Dado que el objeto se mueve con un movimiento acelerado partiendo de una velocidad inicial cero $x = \frac{1}{2}at^2$ *y de acuerdo con la segunda ley de Newton* $a = F/m$ *la rapidez del bloque es* $v = at$ *, o bien* $v = Ft/m\, t$ *. Como el movimiento del cuerpo generado por la fuerza aplicada, estará relacionado con la masa existe una cantidad de movimiento o momentum asociado en el mismo proceso y el momentum esta dado como el producto de la masa por la velocidad* $p = mv$*, despejado el tiempo de la ecuación de x y sustituyéndolo en la ecuación de velocidad se tiene*

$$t = \sqrt{\frac{2mx}{F}}, v = \frac{F}{m}\sqrt{\frac{2mx}{F}}, v = \sqrt{\frac{2Fx}{m}}$$

Y relacionando con la ecuación del momentum se tiene

$$mv = m\left(\sqrt{\frac{2Fx}{m}}\right)$$

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2$$

La cantidad $\frac{p^2}{2m}$ *relaciona la fuerza aplicada sobre una distancia, a esta cantidad se le llama energía cinética y se expresa como*

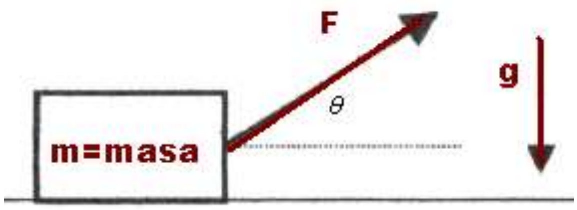
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Si el bloque no se empuja desde el reposo existen dos velocidades v_1, v_2 *relacionadas con cada posición desde el inicio al final del desplazamiento* $\Delta x = x_2 - x_1$ *, por lo que habrá una variación de la energía cinética y esta variación es*

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) = F\left(x_2 - x_1\right)$$

La ecuación anterior indica que la variación de energía cinética en el intervalo Δx *depende solamente de dicho intervalo y de la fuerza F aplicada al bloque. Tal producto, que en general es dado por el producto punto entre los vectores x y F y se denomina trabajo mecánico W a este producto, en general se tiene*

$$W = F\Delta x = \Delta x \cos\theta$$



Siendo θ el ángulo que forma la fuerza aplicada con la horizontal. De esta última ecuación vemos que el trabajo mecánico no es más que una forma de energía, tal que si el trabajo realizado por una fuerza no es nulo, sobre un cuerpo o sistema habrá una variación de energía cinética dada por ΔE_k.

Por esta razón la última ecuación se conoce como el teorema trabajo-energía cinética.

En física se realiza trabajo sólo si existe una fuerza que al actuar sobre un cuerpo da lugar a su desplazamiento. La presencia del ángulo θ en la ecuación del trabajo hace referencia al caso de que la dirección de la fuerza no coincida con la dirección del desplazamiento. En tal caso la fuerza puede descomponerse en sus componentes, una paralela a la dirección del movimiento $F_1 = F\cos\theta$ y otra perpendicular $F_2 = Fsen\theta$. Si el cuerpo describe una línea determinada es porque estará obligado a ello, o dicho de otra forma, porque una fuerza de reacción neutraliza la componente perpendicular que tendería a sacarlo de la trayectoria.
La componente F_1 es la que realiza el trabajo. Por tal motivo se la denomina, con frecuencia, la componente útil.
Cuando la fuerza actuante es paralela a la dirección del desplazamiento, entonces $\theta = 0$ el coseno en la ecuación del trabajo vale 1 y la expresión del trabajo se reduce a: $W = F\Delta x$, donde en este caso toda la fuerza F es útil a efectos de realización de trabajo.

Unidades de trabajo:
Las unidades de trabajo o energía cinética son unidades de fuerza por distancia ya que $[E_k]=[W]=[Fx]$.Para el sistema internacional $[W]=[Nm]=[Joule]=[J]$
En el sistema C.G.S. la unidad de trabajo es el erg tal que $1erg = 10^{-7}J$.

Existen tres casos en los cuales no se realiza trabajo:
I.- Cuando el desplazamiento Δx es nulo, ejemplo cuando se sostiene un peso sin desplazarlo.
II. Cuando el vector fuerza y el vector desplazamiento son perpendiculares Cuando el desplazamiento Δx es nulo, ejemplo cuando se sostiene un peso sin desplazarlo.
III. Cuando la fuerza es nula, ejemplo , el deslizamiento sobre una superficie sin fricción Cuando el vector fuerza y el vector desplazamiento son perpendiculares.

5.2 Trabajo mecánico y potencia:
Se introduce la magnitud potencia mecánica para dar idea de la rapidez con la que se realiza el trabajo; es decir relacionar el trabajo efectuado con la duración del proceso de transferencia de energía .La expresión matemática viene dada por la ecuación:

$$Potencia = \frac{Trabajo}{tiempo}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

La magnitud más importante a la hora de describir el comportamiento mecánico de una máquina es la potencia. La unidad de potencia de acuerdo al sistema internacional de unidades es $\left[J/s \right]$ *, unidad que se denomina watt* $\left[w \right]$*.Entonces un watt es potencia de un agente externo capaz de realizar un trabajo de un joule en un segundo. El caballo de vapor* $\left[cv \right]$ *una unidad técnica de potencia que, aun cuando no pertenece al SI, es utilizada frecuentemente en la caracterización de los motores de explosión, existe la relación* $1cv = 375w$.
Otra unidad empleada comúnmente es el caballo de fuerza (hp),la relación es $1hp = 746w$

Trabajo y energía mecánica:
Físicamente, el trabajo representa una medida de la energía mecánica transferida de un cuerpo o sistema a otro por la acción de una fuerza. Matemáticamente el trabajo es el producto de la fuerza por el desplazamiento.
El cambio del estado mecánico de un cuerpo supone la aportación de una cierta cantidad de energía procedente del exterior, el trabajo puede considerarse como esa cuota de energía mecánica cedida al cuerpo o tomada de él para modificar su estado. De manera que si se considera el proceso como un balance de balance de energía, se puede escribirse la siguiente relación:

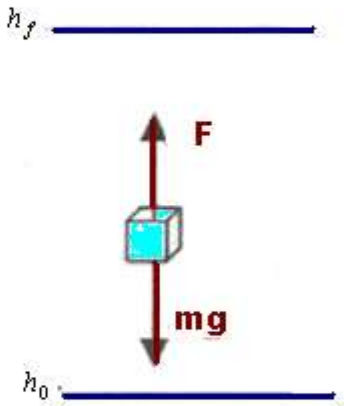
$$W = \Delta E = E_f - E_0$$

Siendo E_f *la energía mecánica final del sistema y* E_0 *la inicial. La relación entre trabajo y energía indica que ambas magnitudes se expresan en la misma unidad de medida, que es el joule.*
El trabajo será negativo si un cuerpo o sistema cede una cantidad de energía mecánica puesto que pierde energía en el proceso.
Si el sistema recibe una cantidad de energía mecánica el trabajo es realizado por un agente exterior sobre el cuerpo, y para él el trabajo será positivo, ya que conlleva un aumento en su energía mecánica; por tanto, si un cuerpo posee energía mecánica puede cederla a otros y realizar un trabajo. Por este motivo, la energía en general y la energía mecánica en particular suponen una capacidad real para producir trabajo.

5.3 Energía potencial

La energía mecánica puede presentarse bajo dos formas diferentes según esté asociada a los cambios de posición o a los cambios de velocidad. A la forma de energía asociada a los cambios de posición se le denomina energía potencial.
La energía potencial es por tanto la energía que posee un cuerpo o sistema en virtud de su posición o de su configuración (conjunto de posiciones).Si se mueve de posición un cuerpo, este adquiere en el estado final una nueva condición que antes no poseía, en su nuevo estado dispone de una capacidad para producir cambios en otros. Con esto ha adquirido en el proceso correspondiente una cierta cantidad de energía que puede ser liberada tan pronto como se le presenten den las condiciones adecuadas.

Energía potencial gravitatoria
Para poder elevar un cuerpo de masa m de manera vertical desde una altura h_0 *hasta una mayor* h_f *es necesario preciso realizar un trabajo contra la fuerza peso que vendrá dado, de acuerdo a (4.3) y (4.6) por:*



$$W = F\left(h_f - h_0\right) = mg\left(h_f - h_0\right)$$

En esta ecuación F representa la fuerza, igual y contraria al peso del cuerpo para poder trasladar la masa m desde una posición inicial h_0 *hasta una final* h_f *,para tener un desplazamiento vertical dado por* $h = \left(h_f - h_0\right)$.

Si el cuerpo parte del reposo y llega al reposo, la variación entre los estados inicial y final afectará únicamente a la posición y no a fa velocidad, por lo que la ecuación anterior se podrá escribir referida sólo a energías potenciales gravitatorias E_P *,* $h_0 = 0$ *, además tomando como origen de las alturas la ecuación de la energía potencial toma la forma*

$$W = E_P = mgh$$

Entonces la energía potencial gravitatoria depende, por tanto de la altura medida desde un punto o nivel tomado como referencia.

5.4 Ejercicios del V

Determinar el trabajo realizado por un individuo que arrastra un bulto de 70 Kg durante 8 m , con una fuerza de 30 Kgf y posteriormente lo levanta a una plataforma de 80 cm de altura.Determinar la potencia promedio si el trabajo se realizoo durante ainutos.

SOLUCION

Se conoce :

$$m = 70Kg$$
$$d = 8m$$
$$F = 30Kgf$$
$$a = g = 9{,}81 \,{}^{m}\!/_{s^2}$$
$$d_2 = 80cm$$
$$t = 3\min$$

Durante la primer parte el trabajo del peso es nulo al haber un ángulo de 90° *con la dirección* *del desplazamiento, durante la segunda parte, al cargar el objeto, se debe vencer el peso del cuerpo para poder cargarlo , de ahí que intervenga la aceleración de la gravedad. Entonces el trabajo total es la suma de los dos trabajos:*

$$Trabajo = (8m)(30Kgf)\left(\tfrac{1N}{0{,}102Kgf}\right) + \left(9{,}81 \, {}^{m}\!/_{s^2}\right)(70Kg)(0{,}8m)$$

$$Trabajo = 2901{,}7412J$$

Y la potencia:

$$P = \frac{Trabajo}{t}$$

$$P = \frac{2901{,}7412J}{(3\min)\left(\frac{60s}{1\min}\right)}$$

$$\underline{P = 16{,}12W}$$

Un objeto de 20 g de masa resbala desde una altura de 2,5 m sobre un montículo de aserrín .El objeto penetra 4 cm antes de detenerse , determinar la fuerza constante que ejerció sobre el aserrín.

SOLUCION:

Se conoce:

$$m = 0{,}2Kg$$
$$h = 2{,}5m$$
$$d = 4cm$$

Se determina primeramente la velocidad con que se impacta el objeto:

$$v = \sqrt{-2gh}$$
$$v = \sqrt{-2\left(9{,}81 \, {}^{m}\!/_{s^2}\right)(-2{,}5m)}$$
$$v = 7 \, {}^{m}\!/_{s}$$

Como la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado , se tiene:

$$Trabajo = Fd = E_{kf} - E_{k0}$$

$$F = \frac{E_{kf} - E_{k0}}{d}$$

Donde

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(0,2Kg\right)\left(7\,{}^{m}\!/_{s}\right)^2$$
$$\underline{E_k = 4,9J}$$

Y como la energía cinética final es cero

$$Fuerza = \frac{\Delta E_k}{d} = \frac{E_{kf} - E_{k0}}{d}$$
$$Fuerza = \frac{0 - 4,9J}{0,04cm}$$
$$\underline{Fuerza = -122,5N}$$

Una fuerza constante de 70 dinas actúa de manera constante durante 15 s sobre un objeto de masa 20 g. Si el objeto tiene una velocidad inicial de $75\,{}^{cm}\!/_{s}$ en la misma dirección de la fuerza. Calcular

a) El trabajo efectuado por la fuerza.

b) La energía cinética final.

c) La potencia desarrollada.

SOLUCION

Se conoce

$$F = 70dinas$$
$$t = 12s$$
$$m = 20g$$
$$v_o = 75\,{}^{cm}\!/_{s}$$

a) Como se conocen tanto la fuerza como la masa se calcula la aceleración

$$a = \frac{F}{m}$$
$$a = \frac{70dinas\left(\dfrac{1N}{10^5 dinas}\right)}{0,02Kg}$$
$$a = 0,0350\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

Como el trabajo es el producto de la fuerza por la distancia se calcula la distancia recorrida con esa aceleración:

$$d = v_o t + \tfrac{1}{2} a t^2$$
$$d = \left(75\, {}^{cm}\!/\!_{s}\right)\left(\tfrac{1m}{100cm}\right)\left(12s\right) + \tfrac{1}{2}\left(0,0350\, {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)\left(12s\right)^2$$
$$d = 9,21m$$

Por lo que el trabajo es:

$$Trabajo = Fd$$
$$Trabajo = \left(7\times10^{-4}\, N\right)\left(9,21m\right)$$
$$\underline{Trabajo = 6,4\times10^{-3}\, J}$$

b) *Se sabe que el trabajo es igual a la variación de la energía cinética por lo que:*

$$Trabajo = E_{k\,f} - E_{k0}$$
$$E_{k\,f} = Trabajo + E_{k0}$$

Por esta razón se determina la energía cinética inicial

$$E_{k0} = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$
$$E_{k0} = \tfrac{1}{2}\left(0,02Kg\right)\left(75\, {}^{cm}\!/\!_{s}\left(\tfrac{1m}{100cm}\right)\right)^2$$
$$\underline{E_{k0} = 5\times10^{-3}\, J}$$

Y al sustituir se tiene:

$$E_{k\,f} = 6,4\times10^{-3}\, J + 5\times10^{-3}\, J$$
$$\underline{E_{k\,f} = 11,4\times10^{-3}\, J}$$

c) *La potencia se calcula de acuerdo a la ecuación :*

$$Potencia = \frac{Trabajo}{tiempo}$$
$$Potencia = \frac{6,4\times10^{-3}\, J}{12s}$$
$$\underline{Potencia = 5,3310^{-4}\, W}$$

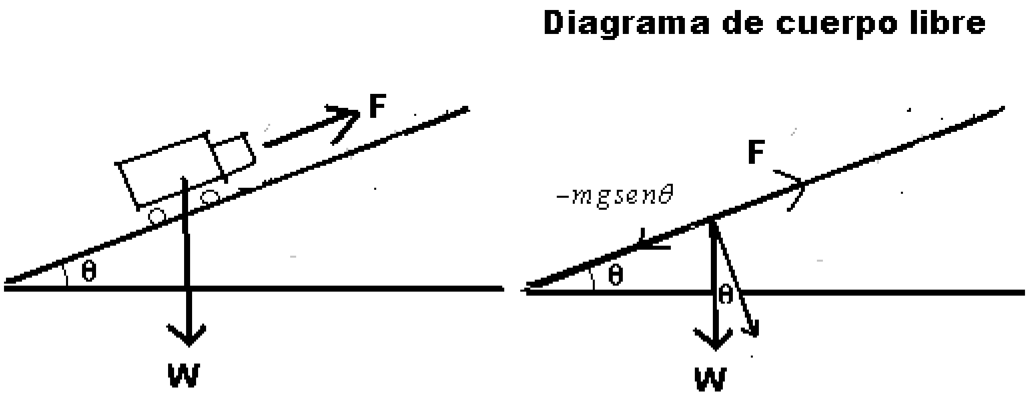
Un vehículo que tiene 1350 Kg de masa asciende por una pendiente de 40° *de inclinación a una manteniendo una velocidad constante de 65 Km/h .Determinar el trabajo y la potencia efectuado por el motor del vehículo durante 4 minutos.*

SOLUCION:

Se conoce :

$$m = 1500Kg$$
$$\theta = 5^{\circ}$$
$$v = 65 \, {}^{Km}\!/\!_{h}$$
$$t = 5\min$$
$$g = 9,81 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

Para que el vehículo pueda moverse a una velocidad constante es necesario que la fuerza del motor sea por lo menos de la misma magnitud y sentido contrario a la componente en la dirección del plano del peso del vehículo.



Por lo que

$$F = -mgsen\theta$$
$$F = (1350Kg)(9,81 \, {}^{m}\!/\!_{s^2})sen40^{\circ}$$
$$F = 9867,9N$$

En 5 minutos el vehículo recorre una distancia de

$$d = vt$$
$$d = (65 \, {}^{Km}\!/\!_{h})(5\min)\left(\tfrac{1h}{60\min}\right)$$
$$d = 5416,16m$$

Y el trabajo que tiene que desarrollar el motor del vehículo es :

$$Trabajo = F \cdot d$$
$$Trabajo = (9867,9N)(5416,16m)$$
$$\underline{Trabajo = 53,4461 \times 10^{6} J}$$

Y la potencia desarrollada es :

$$P = \frac{Trabajo}{t}$$
$$P = \frac{53,4461 \times 10^{6}\, J}{\left(5\min\right)\left(\frac{60s}{1\min}\right)}$$
$$\underline{P = 17,81 \times 10^{4} W}$$

Un objeto de 15 Kg de masa es lanzado verticalmente hacia arriba una velocidad de $45 \, m/s$ *.Determinar*

a) *Los valores iniciales para la energía cinética, energía potencial y energía total.*

b) *La energía cinética y energía potencial al transcurso de 2 segundos.*

c) *La energía cinética y energía potencia a 80 m de altura.*

d) *La altura que tiene el cuerpo una vez que la energía cinética se ha reducido al 75 % de su valor inicial.*

SOLUCION

a) *Se conoce que*

$$v_0 = 45 \, m/s$$
$$m = 15Kg$$

Las energías están definidas como:

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v_0^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(15Kg\right)\left(45 \, m/s\right)^2$$
$$\underline{E_k = 1,51875 \times 10^{4}\, J}$$
$$E_p = mgh$$
$$E_p = \left(15Kg\right)\left(-9,81\right)\left(0m\right)$$
$$\underline{E_p = 0J}$$

Y la energía total es la suma de ambas energías

$$E_T = E_k + E_p$$
$$\underline{E_T = 1,51875 \times 10^{4}\, J}$$

b) *Las energías cinética y potencial después de 2 segundos se determina como:*

$$E_k = \tfrac{1}{2} m v^2$$

Para conocer la velocidad del objeto al transcurrir 2s se emplea la ecuación de tiro vertical

$v_f = v_0 + gt$ *, para este caso g es negativa ya que el objeto va en ascenso en dirección opuesta a la acción de la gravedad, entonces se sustituye en la ecuación de energía cinética*

$$E_k = \tfrac{1}{2} m\left(v_0 + gt\right)^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(15Kg\right)\left[45 \,{}^{m}\!/\!_{s} - \left(9{,}81 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left(2s\right)\right]^2$$
$$\underline{E_k = 4{,}83110^3\, J}$$

Y para la energía potencial se tiene

$$E_p = mgh$$

Se desconoce la altura pero se puede conocer con la ecuación de altura de tiro vertical

$$h = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

Y se sustituye en la ecuación de energía potencial

$$E_p = -mg\left(v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2\right)$$
$$E_p = -\left(15Kg\right)\left(-9{,}81 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left[\left(45 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left(2s\right) + \tfrac{1}{2}\left(-9{,}81 \,{}^{m}\!/\!_{s}\right)\left(2s\right)^2\right]$$
$$\underline{E_p = 1{,}0356 \times 10^4\, J}$$

Nota: El primer signo de la ecuación aparece porque el objeto se mueve en dirección opuesta a la acción de la gravedad.

Para determinar la conservación de energía se suman y la energía total es:

$$E_T = E_k + E_p$$
$$E_T = 4{,}831 \times 10^3\, J + 1{,}0356 \times 10^4\, J$$
$$\underline{E_T = 1{,}5187 \times 10^4\, J}$$

Que es igual a la energía total para $t = 0s$ *.*

c) De acuerdo con las ecuaciones del inciso anterior, para conocer las energías se necesita conocer el tiempo transcurrido por lo que se emplea la ecuación de tiro vertical y se sustituyen tanto la altura como la velocidad para determinar el tiempo transcurrido para tomar esa altura y se obtiene una ecuación cuadrática:

$$h = v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$80 = 45t + \tfrac{1}{2} gt^2$$
$$\tfrac{1}{2} gt^2 + 45t - 80 = 0$$

Se resuelve la ecuación y se tiene:

$$t = \frac{-45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)(-9,81)(-80)}}{2\left(\tfrac{1}{2}\right)(-9,81)}$$
$$t = \frac{-45 \pm 21,34}{-9,81}$$
$$t = 2,4118s$$
$$t = 6,7625$$

El hecho de que existan dos valores para t se explica porque el tiempo menor corresponde al ascenso del objeto y el otro al descenso; se realiza la sustitución de t en las ecuaciones de energía cinética y potencial:

$$E_k = \tfrac{1}{2} m\left(v_0 + gt\right)^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2}(15Kg)\left[45 \, m/s - (9,81 \, m/s)(2,4118s)\right]^2$$
$$\underline{E_k = 3,41554 \times 10^3 J}$$
$$E_p = -mg\left(v_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2\right)$$
$$E_p = -(15Kg)(-9,81 \, m/s)\left[(45 \, m/s)(2,4118s) + \tfrac{1}{2}(-9,81 \, m/s)(2,4118s)^2\right]$$
$$\underline{E_p = 1,177195 \times 10^4 J}$$

Puede comprobarse también que la energía total permanece constante al realizar la suma. Puede sustituirse también el otro valor de t.

d)

Para conocer la altura a la que se encuentra el objeto cuando la energía cinética se ha reducido al al 75% de su valor inicial se emplea la ecuación de tiro vertical:

$$v_f^2 - v_0^2 = 2gh$$

Se emplea esta ecuación porque solo basta determinar la velocidad final para despejar y conocer la altura, la velocidad final se calcula de la ecuación de energía cinética:

$$E_{k\,f} = \tfrac{1}{2} m v_f^2$$
$$v_f = \sqrt{\frac{2E_{k\,f}}{m}}$$

Y como $E_{k\,f} = 0,75E_{k0}$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(0,75)(E_{k0})}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(0,75)\left(1,51875\times10^4\,J\right)}{15Kg}}$$

$$v_f = 38,97\,{}^{m}\!/_{s}$$

Entonces la altura es:

$$h = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2g}$$

Al sustituir se tiene:

$$h = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2g}$$

$$h = \frac{\left(38,97\,{}^{m}\!/_{s}\right)^2 - \left(45\,{}^{m}\!/_{s}\right)^2}{2\left(-9,81\,{}^{m}\!/_{s^2}\right)}$$

$$\underline{h = 25,80m}$$

Ejercicios Capítulo V

1.- Desde el reposo se acelera de manera uniforme un vehículo de 2000kg hasta alcanzar 15 m/s en 3 s. Calcular:
a) El trabajo efectuado sobre el auto en este tiempo.
b) La potencia promedio entregada por el motor en los primeros 5s
c) La potencia instantánea entregada por el motor después de 4 s.
2.-De un pozo se saca agua con un recipiente de 20 kg y al sacarla se realiza un trabajo de 6000 J, determinar la profundidad del pozo.

3. Partiendo del reposo un elevador comienza a moverse hacia arriba. Si la masa del elevador es de 700 kg y pasan 4 s hasta llegar a una velocidad constante 2 m/s; determinar:
a) La potencia promedio del motor del elevador durante este periodo
b) La potencia del elevador mientras se mueve a velocidad constante.

4.- Un objeto de 2 kg de masa se mueve desde el punto A al punto B, de tal manera que en A tiene una velocidad de 5 m/s y mientras en B tiene una energía cinética de 15J. Determinar:
a) La energía cinética en A.
b) La velocidad en B.
c) El trabajo total realizado sobre la partícula cuando se mueve de A a B.

5.- Una fuerza constante de 30 N dirigida a 30^0 por debajo de la horizontal empuja un bloque de 5 kg de masa a lo largo de 5m sobre una superficie horizontal sin fricción, por una fuerza constante de 16 [N] dirigida a 25º debajo de la horizontal. Determinar
a) El trabajo efectuado por la fuerza aplicada.
b) La fuerza normal ejercida por la mesa.
c) La fuerza neta sobre el bloque.

6.- Una gota de lluvia de masa aproximada de $3,35\text{x}10^{-5}$ kg cae verticalmente a velocidad constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Para cuando la gota ha descendido 120 m, calcular a) el trabajo realizado por la gravedad y b) La energía disipada por la resistencia del aire.

7.- Un objeto de 10 kg se mueve a 2,5 m/s .Determinar qué tan rápido se debe mover otro objeto de 85 g para que ambos tengan la misma energía cinética?

8.- Una bala de 5,7 g de masa una velocidad de 550 m/s penetra 3 cm una pared. Utilizar consideraciones de energía para encontrar la fuerza de fricción promedio que detiene la bala.
b) Si se supone contante la fuerza de fricción determinar el tiempo transcurrido entre el momento en que la bala entra en la pared y el momento en que se detiene.

9.- Un objeto de 5 kg se desplaza a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza aislada. Si el objeto realiza una fuerza de 100 J conforme se mueve desde una posición
x = 3 m a x =7, 5m, calcular:
a) El cambio de su energía cinética.
b) El cambio en su energía potencial.
c) La velocidad en x = 7,5 m si la velocidad es cero en x=2.

10.-Si una bomba eléctrica es capaz de elevar 350 kg de agua a una altura de 15m en 55s segundos. Determinar:
a) La potencia útil de la bomba.
b) El rendimiento si su potencia teórica es de 2590 w.